Ministerio de Educación

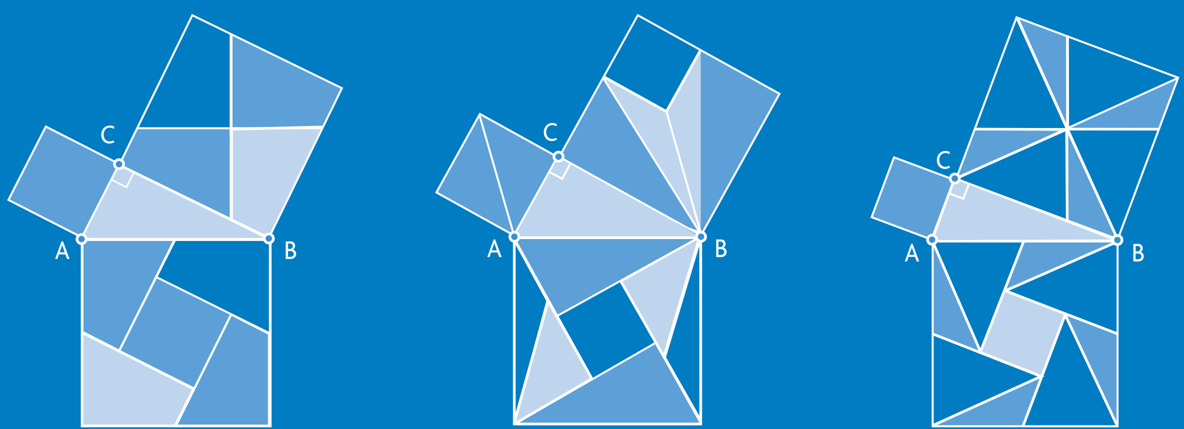
Gobierno de Chile

Desarrollo de habilidades:

Aprender a pensar matemáticamente

7º y 8º año de Educación Básica

Habilidad de **argumentar y comunicar**



DESARROLLO DE HABILIDADES:
APRENDER A PENSAR MATEMÁTICAMENTE

7° y 8° año de Educación Básica

Ministerio de Educación

Material elaborado por Alejandro Pedreros Matta,
Unidad de Currículum y Evaluación y Profesionales del
Nivel de Educación Media de la División de Educación General.

Ministerio de Educación de Chile
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago - Chile

Coordinación Editorial:
Jasnaya Carrasco Segura
Sandra Molina Martínez
División de Educación General MINEDUC

Diseño:
Verónica Santana
Sebastián Olivari

Registro de Propiedad Intelectual N° 266188
ISBN: 978-956-292-547-1

mayo, 2016

Índice

Desarrollo de Habilidades:

Aprender a Pensar Matemáticamente

ANTECEDENTES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Las Bases Curriculares que abordan los años académicos de 7º año de Educación Básica a 2º año de Educación Media[1], comprenden en forma transversal habilidades de pensamiento en que subyace la habilidad de solucionar situaciones diversas. En la asignatura de Matemática, se señala:

> "Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas" (p.104).

Del mismo modo y con respecto a los Estándares de Aprendizaje, descritos para 8º año de Educación Básica, el Nivel de Aprendizaje Adecuado en el contexto de la resolución de problemas en la asignatura de Matemática establece que las y los estudiantes deben:

> "(...) mostrar generalmente que son capaces de aplicar conocimientos y habilidades de razonamiento matemático en situaciones directas y en problemas de varios pasos en los que se requiere elección de datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado"[2] (p. 10).

Asimismo, el currículum nacional potencia el logro de objetivos de aprendizaje que articulan el desarrollo de contenidos, habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática. En este contexto, es importante analizar y ejemplificar cómo las habilidades matemáticas descritas para 7º y 8º año de Educación Básica aportan a la formación de un ciudadano para resolver e

1. Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.
2. Ministerio de Educación de Chile (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática.

interpretar problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, para lo cual se requiere de un alto nivel de comprensión de las matemáticas y de razonamiento matemático.

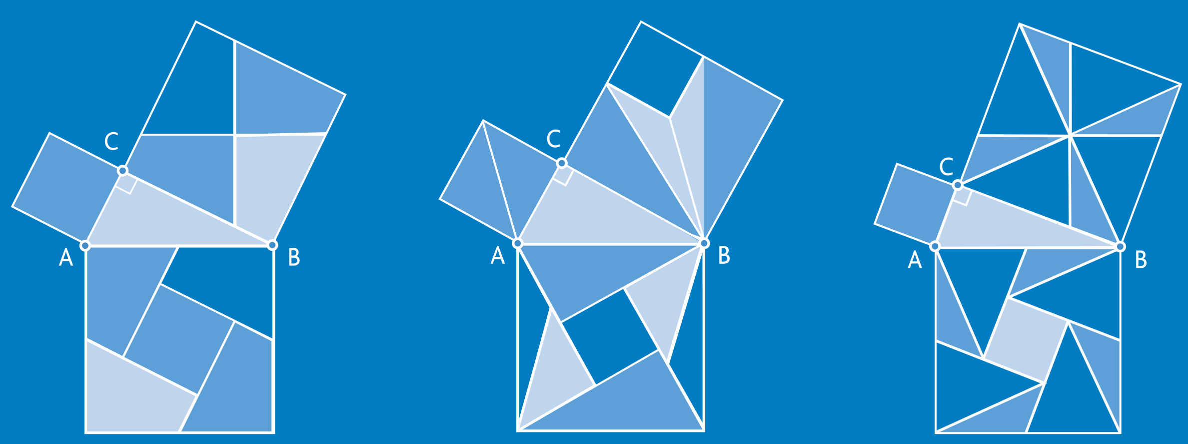
Por otra parte, la formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (Mineduc, 2013). Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

Para lograrlo, es necesario que los ciudadanos desarrollen el razonamiento matemático, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a un estudiante que aplique la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos matemáticos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él, que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite aplicar conocimiento y comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la resolución de problemas. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por una parte, que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. Otro de los énfasis del currículum de matemática consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal, o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Las Bases Curriculares dan relevancia al modelamiento matemático. El objetivo de desarrollar la habilidad de modelamiento matemático es lograr que las y los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos. Asimismo, las habilidades comunicativas y argumentativas son centrales en este escenario, estas se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

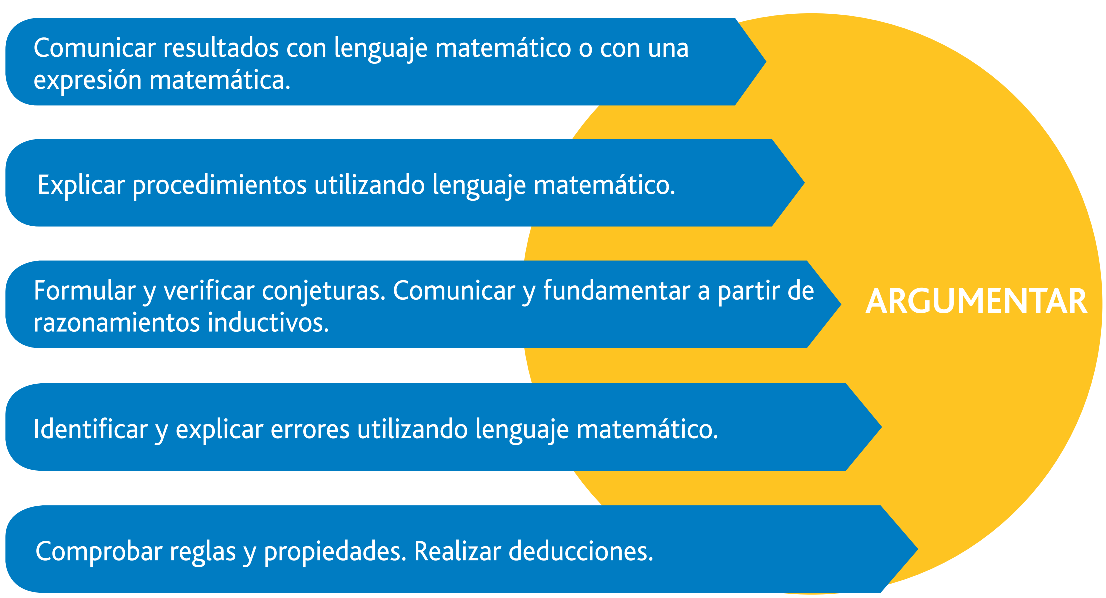
Por lo tanto, aprender a ser docente de matemáticas implica desarrollar, entre otras, la competencia de planificar, aplicar y analizar estrategias e instrumentos de evaluación adaptados a las características de las competencias matemáticas desarrolladas por las y los estudiantes (Font y Godino, 2011). Además, como docentes de matemáticas, sabemos que debemos escuchar más a las y los estudiantes y, sobre todo, formular preguntas que permitan al docente generar oportunidades de aprendizaje. Es responsabilidad nuestra ir avanzando en el manejo del cuaderno como un instrumento de trabajo y un registro que permite obtener evidencia de aprendizaje.

Habilidad de **argumentar y comunicar**



¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que permitan el desarrollo de la **habilidad de argumentar**?

La habilidad de argumentar implica comunicar resultados en lenguaje matemático, explicar procedimientos, comunicar y fundamentar a partir de razonamientos inductivos, identificar y explicar errores, formular/verificar conjeturar, comprobar reglas y propiedades, y realizar deducciones.



Argumentar y Comunicar como habilidad principal en el eje Números

La generalización es uno de los procesos característicos del lenguaje algebraico, que está implícita en general, en las matemáticas y en las diferentes ramas del saber. Por ejemplo, la generalización es, según Mason (1996), el centro alrededor del cual giran las matemáticas, y consiste en ver tanto los casos particulares en la generalidad como la generalidad a través de los casos particulares. Por su parte Radford (2010, 2013) resalta igualmente la importancia de la generalización, diferenciando entre generalización algebraica y generalización aritmética.

Para Socas (2010, 2012), la generalización es uno de los procedimientos básicos en la producción del conocimiento en las diferentes disciplinas, en particular en la matemática. En esta, la generalización algebraica es un objeto matemático que emerge como uno de los tres procesos fundamentales que caracterizan al campo conceptual algebraico, junto con la sustitución formal y la modelización.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de generalización algebraica se puede organizar a partir de situaciones diversas, numéricas o geométricas, en las que no viene explicitada la regla, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular que implica muchas veces un razonamiento inductivo (Rauno, Socas & Palarea, 2015).

El razonamiento matemático es un proceso de pensamiento que permite argumentar y obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. Según sea el desarrollo de dicho proceso, se distingue entre razonamiento deductivo y razonamiento inductivo.

Específicamente, Pólya (1945) sugiere que el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en esos casos, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la argumentación posterior de dicha conjetura. Considerando lo anterior, Cañadas y Castro (2004, 2010) proponen las siguientes etapas para potenciar el razonamiento inductivo:

- **Trabajo con casos particulares.** Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.
- **Organización de casos particulares.** Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden.
- **Identificación de patrones.** El patrón o pauta es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse.
- **Formulación de conjeturas.** Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo y se justifica que la conjetura no es válida, esta se rechaza.
- **Justificación de las conjeturas.** Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. Se vuelve a comprobar con otros casos particulares.
- **Generalización.** La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados y conlleva la argumentación o demostración de la conjetura según corresponda.

A continuación se presenta un ejemplo que nos permitirá visualizar y comprender cómo generar oportunidades de aprendizaje que promuevan el desarrollo de la argumentación en matemática.

1. **Trabajo con casos particulares:** dada la secuencia numérica 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18... las y los estudiantes pueden descubrir que en ella hay varias regularidades. La más tradicional es que los números pares terminan en los dígitos 2, 4, 6, 8 y 0. Para visualizar lo planteado anteriormente, surge la necesidad de organizar estratégicamente los números pares.

2. **Organización de casos particulares:** para visualizar la regularidad anterior, construiremos la siguiente tabla.

Caso 1:

2	12	22	32	42	52	62	72
4	14	24	34	44	54	64	74
6	16	26	36	46	56	66	76
8	18	28	38	48	58	68	78
10	20	30	40	50	60	70	80

Como podemos observar, la regularidad es evidente y fácil de inferir. Ahora bien, ¿es la única regularidad? ¿Qué sucede si ahora buscamos “algunos” números pares que cumplan con otra regularidad?

Caso 2:

2	32	512	8 192
4	64	1 024	16 384
8	128	2 048	32 768
16	256	4 096	65 536

¿Qué regularidad se puede observar si ahora analizamos los siguientes números pares?

Caso 3:

4	64	1 024	16 384
16	256	4 096	65 536

3. **Identificación de patrones:** hemos descubierto diferentes regularidades. Procederemos a sistematizarlas en cada caso.

Caso 1

Todos los números pares tienen en el dígito de las unidades al 2, 4, 6, 8 o 0.

Caso 2:

Todos los números pares que son potencias de dos tienen como dígito de las unidades al 2, 4, 6 u 8.

Caso 3

Todos los números pares que son cuadrados perfectos pueden ser representados a través de una figura o forma semejante a un cuadrado.

4. **Formulación de conjeturas:** Lo central de esta etapa es promover que las y los estudiantes formulen preguntas (en una primera etapa la o el docente debe orientar esa formulación) tales como: ¿Es correcto afirmar que los números pares se obtienen sumando 2 sucesivamente? ¿Por qué los números pares que también son potencias de 2 no "terminan" en 0? ¿Por qué los números 4, 16, 64, 256... se llaman cuadrados perfectos?

   Considerando las preguntas formuladas anteriormente, el o la docente debe orientar a sus estudiantes a formular conjeturas tales como:

Caso 1:

Todos los números pares se obtienen sumando 2.

Caso 2:

Todos los números pares que son potencias de dos tienen como dígito de las unidades al 2, 4, 6 u 8.

Caso 3:

Todos los números pares que son cuadrados perfectos pueden ser representados a través de una figura o forma semejante a un cuadrado.

5. **Justificación de conjeturas:** en esta etapa surge la necesidad, por parte de las y los estudiantes, de construir argumentos para señalar si las conjeturas anteriores son verdaderas o falsas. Frente a lo anterior, procederemos a evaluar el valor de verdad de dichas conjeturas.

Caso 1:
Todos los números pares se obtienen sumando 2.

Para la conjetura del caso 1, podemos señalar que las y los estudiantes deberían analizar la conjetura en función del significado de una secuencia numérica, es decir, toda secuencia numérica debe ser analizada considerando el primer término de la secuencia y el patrón de formación. Por ende, la secuencia numérica de números pares tiene como primer término al número 0 y el patrón de formación es sumar 2. Dada la información anterior, ¿Qué deberían relacionar e inferir las y los estudiantes?

El o la docente debe generar una oportunidad de aprendizaje de tal manera que las y los estudiantes puedan analizar secuencias numéricas cuyo primer término sea diferente del número 2. Por ejemplo:

Primer término	Patrón + 2							
2	4	6	8	10	12	14	16	18…
7	9	11	13	15	17	19	21	23…

Como podemos observar, la conjetura del caso 1 es falsa. Los números pares no son los únicos números que se pueden “formar” sumando 2, los números impares también se obtienen con la secuencia numérica cuyo primer término es el 1 y el patrón es +2.

Caso 2:

Todos los números pares que son potencias de dos tienen como dígito de las unidades a 2, 4, 6 u 8.

Considerando que $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 2$ *n* veces, ¿por qué motivo todo número par que es potencia de 2 no tiene en el dígito de las unidades al número 0? Una forma de abordar esta interrogante es analizando los casos en que, al multiplicar por 2 un número cualesquiera, terminan con el cero en el dígito de las unidades.

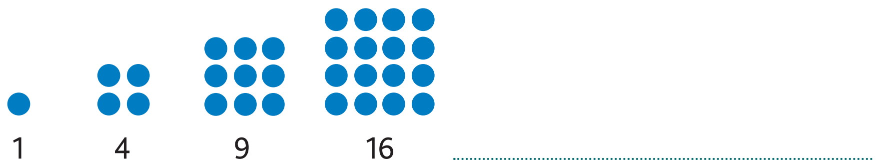
$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 4 = 8$	$2 \cdot 5 = 10$
$2 \cdot 6 = 12$	$2 \cdot 7 = 14$	$2 \cdot 8 = 16$	$2 \cdot 9 = 18$	$2 \cdot 10 = 20$
$2 \cdot 11 = 22$	$2 \cdot 12 = 24$	$2 \cdot 13 = 26$	$2 \cdot 14 = 28$	$2 \cdot 15 = 30$
$2 \cdot 16 = 32$	$2 \cdot 17 = 34$	$2 \cdot 18 = 36$	$2 \cdot 19 = 38$	$2 \cdot 20 = 40$
·	·	·	·	$2 \cdot 25 = 50$
·	·	·	·	$2 \cdot 30 = 60$
·	·	·	·	$2 \cdot 35 = 70$
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·

Como podemos observar, los únicos resultados cuyo dígito de las unidades es cero se dan cuando un número par es multiplicado por un múltiplo de 5 o un número par es multiplicado por un múltiplo de 10. Por lo tanto, el número 5 es un número impar y el número 10 es producto de multiplicar $2 \cdot 5$, lo cual nos permite concluir y comprender por qué un número que es potencia de 2 jamás podrá tener el número cero en el dígito de las unidades. Por lo tanto, la conjetura 2 es verdadera.

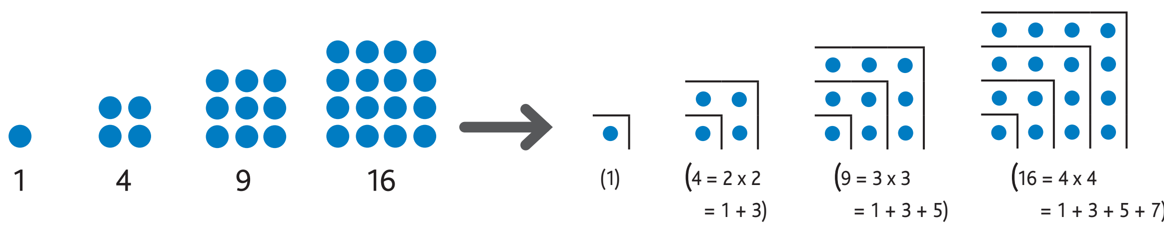
Caso 3:

Todos los números pares que son cuadrados perfectos pueden ser representados a través de una figura o forma semejante a un cuadrado.

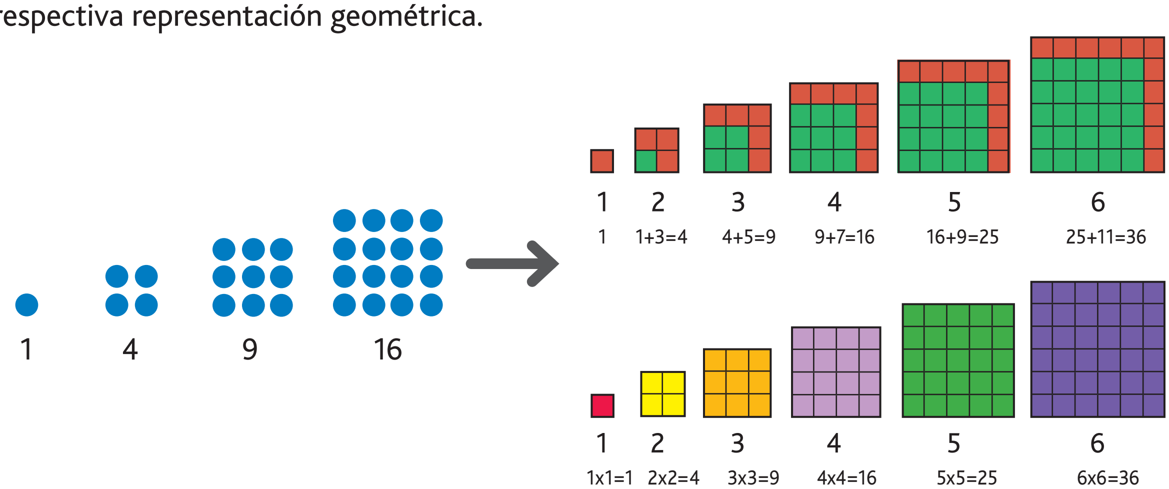
Para verificar si la conjetura anterior es verdadera o falsa, procederemos a realizar un análisis de la secuencia numérica cuyos elementos son cuadrados perfectos.



Ahora podemos relacionar la secuencia anterior con los números impares.



También podemos relacionar la secuencia de cuadrados perfectos con números impares y su respectiva representación geométrica.



Ahora bien, al observar la secuencia numérica 1, 4, 9, 16, 25... podemos inferir que todos los términos pueden ser representados a través de una figura geométrica cuadrada. Entonces, los términos de la secuencia numérica 4 16 64 256... también pueden ser representados a través de una figura geométrica cuadrada. Por lo tanto, la conjetura del caso 3 es verdadera.

6. Generalización.

Caso 1:

Retomando el análisis de números pares, el o la docente puede gestionar otras oportunidades de aprendizaje que permitan profundizar en el significado de los procesos de generalización. Por ejemplo, las y los estudiantes pueden analizar los siguientes casos particulares, identificar el patrón y conjeturar la posible expresión algebraica para todo número par.

$2 = 2 \cdot 1$	$12 = 2 \cdot 6$	$22 = 2 \cdot 11$	$32 = 2 \cdot 16$	$42 = 2 \cdot 21$
$4 = 2 \cdot 2$	$14 = 2 \cdot 7$	$24 = 2 \cdot 12$	$34 = 2 \cdot 17$	$44 = 2 \cdot 22$
$6 = 2 \cdot 3$	$16 = 2 \cdot 8$	$26 = 2 \cdot 13$	$36 = 2 \cdot 18$	$46 = 2 \cdot 23$
$8 = 2 \cdot 4$	$18 = 2 \cdot 9$	$28 = 2 \cdot 14$	$38 = 2 \cdot 19$	$48 = 2 \cdot 24$
$10 = 2 \cdot 5$	$20 = 2 \cdot 10$	$30 = 2 \cdot 15$	$40 = 2 \cdot 20$	$50 = 2 \cdot 25$

.....

¿Qué varía y qué es constante? Esta interrogante permite que los estudiantes puedan descubrir esta nueva regularidad y progresivamente inferir que la expresión algebraica que representa a todos los números pares es $2n$, $n \in N$.

Caso 2:

Al analizar los números naturales que son potencias de 2, las y los estudiantes tienen la oportunidad de descubrir diferentes generalizaciones. A continuación procederemos a ejemplificar una vez más con las etapas propuestas por Cañadas y Castro (2004, 2010).

- **Analizar y organizar casos particulares:** en este ejemplo es importante que las y los estudiantes recuerden que pueden "representar" un número mediante multiplicación o mediante división.

$32 = 16 \times 2$	$32 = 64 : 2$
$16 = 8 \times 2$	$16 = 32 : 2$
$8 = 4 \times 2$	$8 = 16 : 2$
$4 = 2 \times 2$	$4 = 8 : 2$
$2 = 1 \times 2$	$2 = 4 : 2$
.	.
.	.
.	.

Habilidad de argumentar y comunicar

- **Identificar el Patrón:** posteriormente, las y los estudiantes descubren que pueden representar dichos números mediante potencias y considerando la operatoria anterior. La regularidad a inferir se responde planteando las siguientes interrogantes: ¿Qué varía y qué es constante? ¿Qué sucede si continuamos dividiendo potencias de igual base?

$32 = 64 : 2$	$2^5 = 2^6 : 2^1$
$16 = 32 : 2$	$2^4 = 2^5 : 2^1$
$8 = 16 : 2$	$2^3 = 2^4 : 2^1$
$4 = 8 : 2$	$2^2 = 2^3 : 2^1$
$2 = 4 : 2$	$2^1 = 2^2 : 2^1$
•	
•	
•	

¿Qué sucede si continuamos dividiendo por 2?

$32 = 64 : 2$	$2^5 = 2^6 : 2^1$
$16 = 32 : 2$	$2^4 = 2^5 : 2^1$
$8 = 16 : 2$	$2^3 = 2^4 : 2^1$
$4 = 8 : 2$	$2^2 = 2^3 : 2^1$
$2 = 4 : 2$	$2^1 = 2^2 : 2^1$
$1 = 2 : 2$	¿¿¿¿¿?????
•	
•	

- **Formular conjeturas, verificar conjeturas y generalizar:** en esta etapa, las y los estudiantes deben conjeturar considerando que toda regularidad se debe cumplir siempre, y así, lograr el status de generalización.

$32 = 64 : 2$	$2^5 = 2^6 : 2^1$
$16 = 32 : 2$	$2^4 = 2^5 : 2^1$
$8 = 16 : 2$	$2^3 = 2^4 : 2^1$
$4 = 8 : 2$	$2^2 = 2^3 : 2^1$
$2 = 4 : 2$	$2^1 = 2^2 : 2^1$
$1 = 2 : 2$	**¿Qué sucede si continuamos dividiendo por 2?**
$\frac{1}{2} = 1 : 2$	

En síntesis, si continuamos dividiendo por 2... ¿Se cumple siempre que al dividir potencias de igual base, la base de la potencia es constante y los exponentes de dichas potencias se restan?

Las propiedades de potencias se descubren al intentar responder la interrogante, ¿por qué un número elevado a cero es igual a 1?

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{con } a \neq 0$$

Finalmente, al relacionar la generalización planteada para el caso 3 (Todo número cuadrado perfecto se puede expresar como n^2, con $n \in N$) con la generalización del caso 2, emerge la siguiente interrogante: ¿Cuál es la diferencia entre 2^n y n^2? Se aconseja que interrogantes tales como las anteriores puedan ser orientadas por el o la docente en un contexto de reflexión y argumentación disciplinar.

Caso 3:

En el contexto de los números cuadrados perfectos, las y los estudiantes pueden inferir otras dos generalizaciones, las cuales deben ser descubiertas y pueden ser escritas en lenguaje natural o en lenguaje algebraico:

a) Todo número cuadrado perfecto se puede escribir como la suma de números impares. Por ejemplo, el tercer número natural cuadrado perfecto es igual a la suma de los tres primeros números impares: $(9 = 3 \cdot 3 = 1 + 3 + 5)$.

b) Todo número cuadrado perfecto se puede expresar como n^2, con $n \in N$.

Argumentar y Comunicar como habilidad principal en el eje Geometría

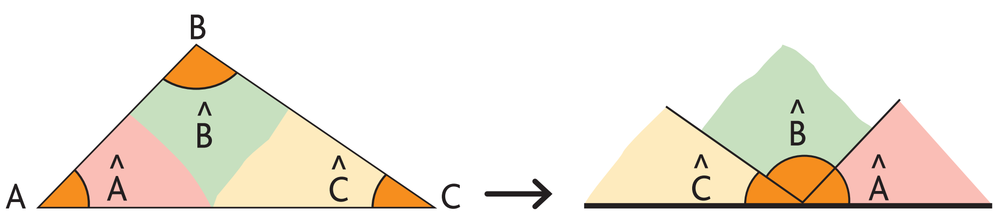
Por otra parte, el proceso de argumentación y el estudio de casos dinámicos pueden considerar las siguientes etapas:

- Manipulación con material concreto.
- Manipulación de una situación dinámica en geometría.
- Observación de una propiedad invariante en la situación dinámica.
- Formulación de una conjetura.
- Validez de la conjetura.
- Generalización de la conjetura en definición, propiedad, entre otras.
- Justificación de la conjetura.

Los siguientes problemas son ejemplificaciones que el o la docente puede desarrollar a partir de las etapas planteadas anteriormente.

Ejemplo 1: Suma de ángulos interiores de un triángulo

Con material concreto: el o la estudiante debe comprender que al trabajar con material concreto está analizando un caso particular y no puede generalizar. Por lo tanto, en lo posible se recomienda incorporar tecnología, y así, realizar un análisis geométrico a partir de una situación dinámica.

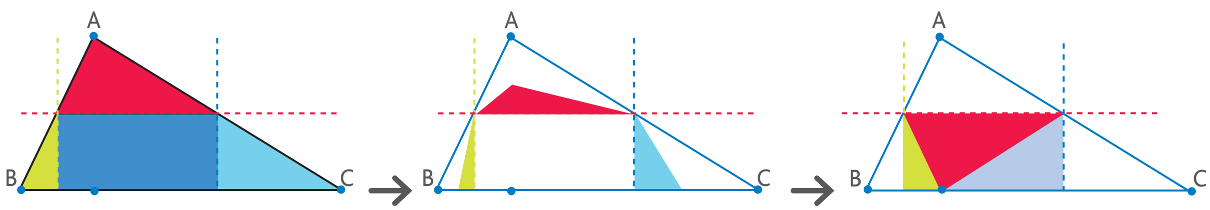


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Habilidad de argumentar y comunicar

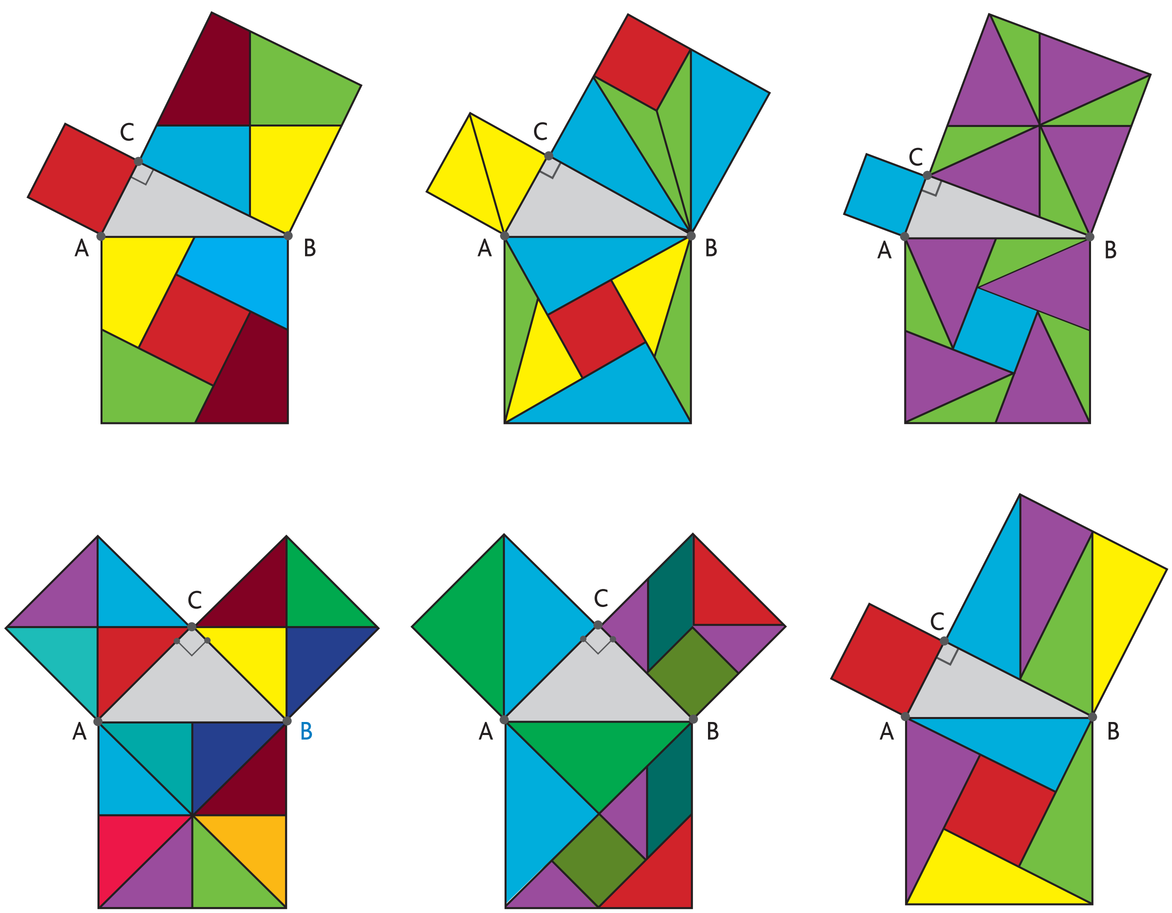
Situación dinámica: el o la estudiante debe comprender que una situación dinámica permite responder la interrogante ¿Se cumple siempre que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°?

En este proceso, es fundamental que las y los estudiantes verifiquen y justifiquen las conjeturas planteadas al trabajar con material concreto.

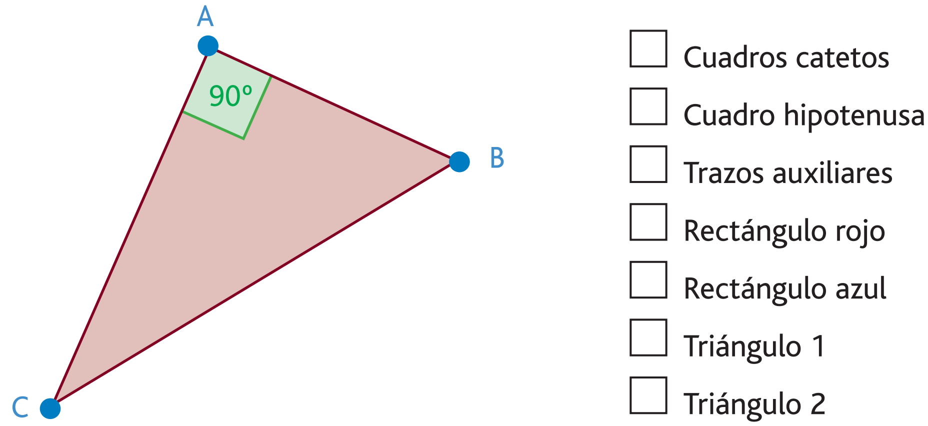


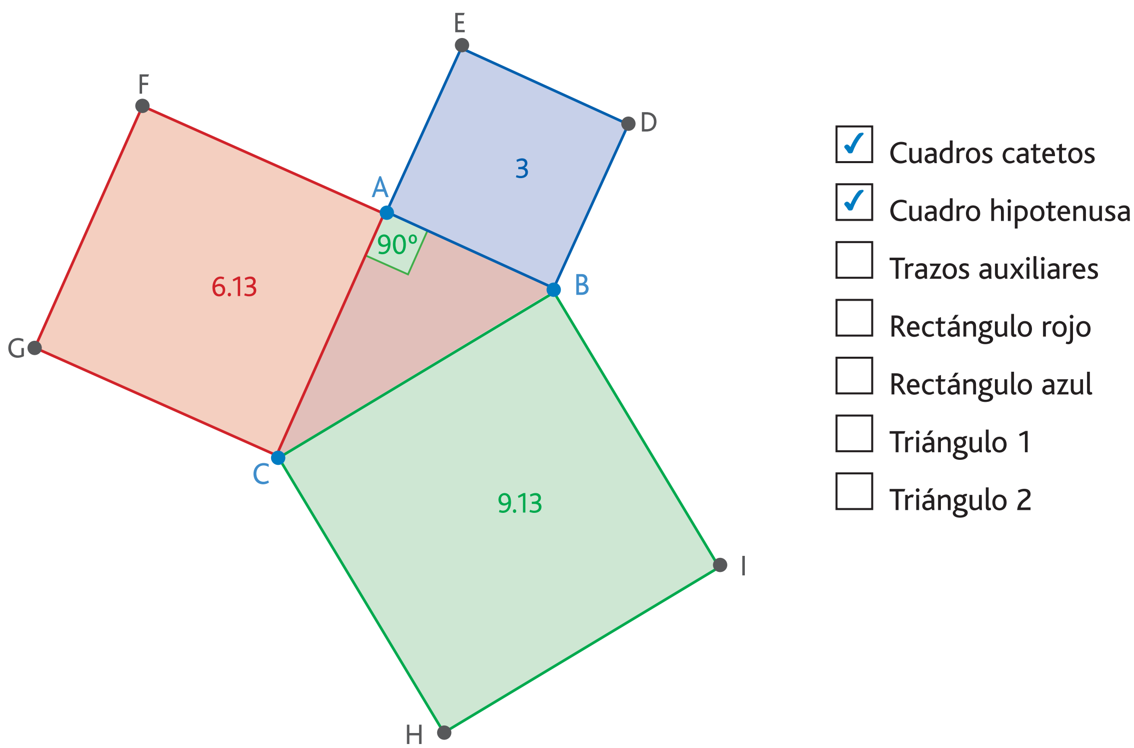
Ejemplo 2: Teorema de Pitágoras

Con material concreto: el o la estudiante debe comprender que al trabajar con material concreto está analizando solamente casos particulares que le permiten comprobar el Teorema de Pitágoras. Por lo tanto, surge la conveniencia de incorporar tecnología, y así, realizar un análisis geométrico a partir de una situación dinámica.

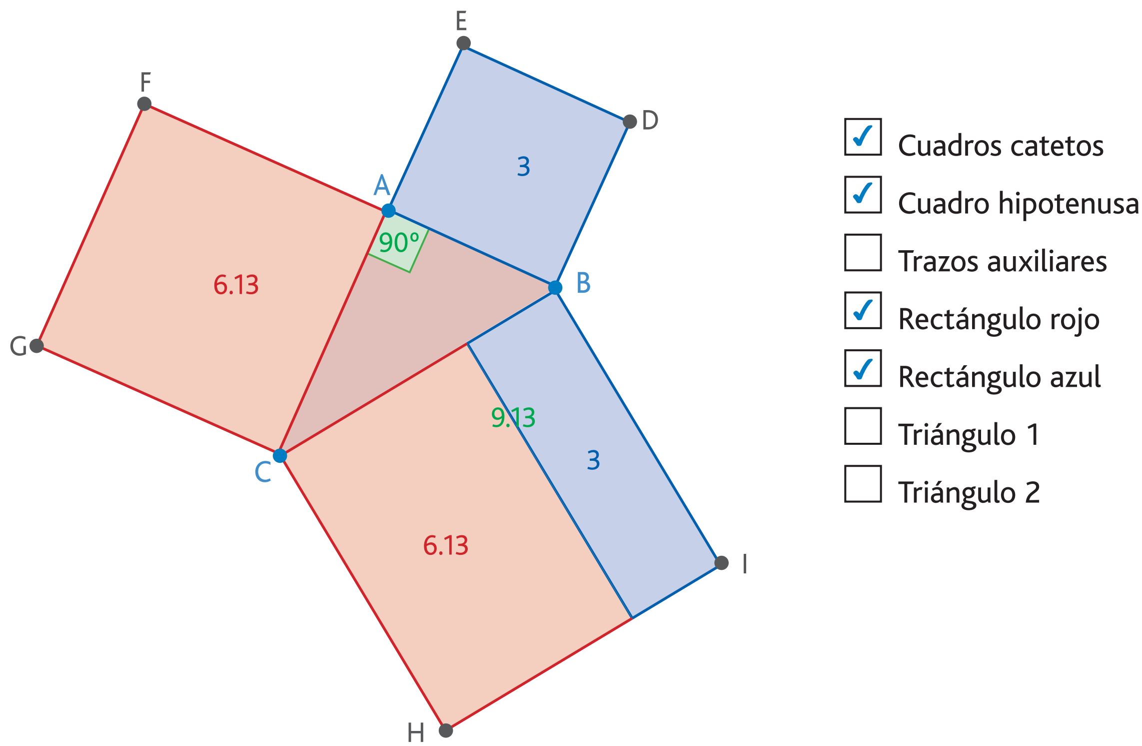


Situación dinámica: el o la estudiante debe comprender que una situación dinámica permite responder la interrogante ¿Se cumple siempre que, dado un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados formados a partir de los catetos es igual al área del cuadrado formado a partir de la hipotenusa? En este proceso, es fundamental que los estudiantes verifiquen y justifiquen las conjeturas planteadas con algún software o manipulador virtual.





https://www.geogebra.org/m/33575



https://www.geogebra.org/m/33575

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile