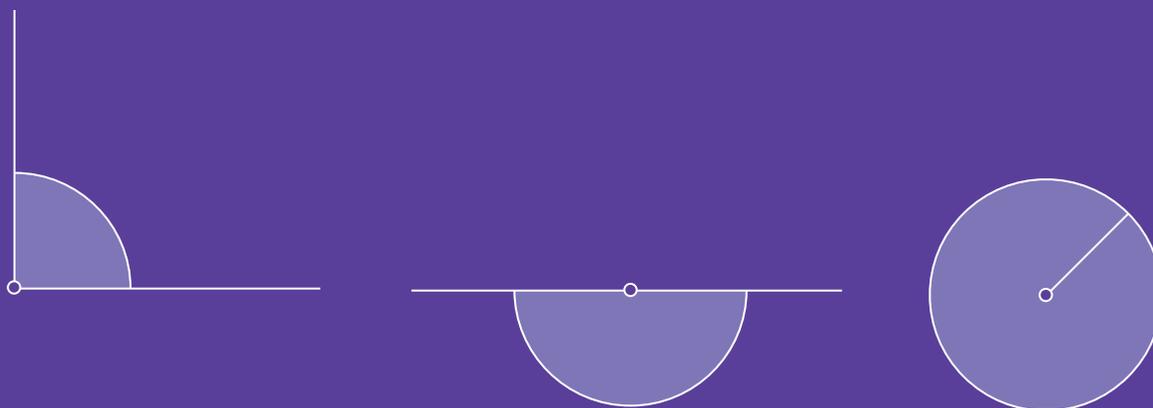


Habilidad de **modelamiento matemático**



**DESARROLLO DE HABILIDADES:
APRENDER A PENSAR MATEMÁTICAMENTE**

7° y 8° año de Educación Básica

Ministerio de Educación

Material elaborado por Alejandro Pedreros Matta,
Unidad de Currículum y Evaluación y Profesionales del
Nivel de Educación Media de la División de Educación General.

Ministerio de Educación de Chile
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago - Chile

Coordinación Editorial:
Jasnaya Carrasco Segura
Sandra Molina Martínez
División de Educación General MINEDUC

Diseño:
Verónica Santana
Sebastián Olivari

Registro de Propiedad Intelectual N° 266188
ISBN: 978-956-292-547-1

mayo, 2016

Índice

| | |
|---|-----------|
| Desarrollo de habilidades: Aprender a Pensar Matemáticamente. | 5 |
| Antecedentes del currículo de matemática. | 7 |
| Habilidad de modelamiento matemático | 11 |
| ¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que procuren el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático? | 12 |
| ¿Qué implica el proceso de modelamiento matemático? | 20 |
| Modelamiento matemático como habilidad principal en el eje de Álgebra y Funciones. | 23 |
| Modelar situaciones de la vida diaria con ecuaciones. | 35 |
| Modelamiento matemático como habilidad principal en el eje Geometría. | 43 |

Desarrollo de Habilidades:

Aprender a Pensar Matemáticamente

ANTECEDENTES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Las Bases Curriculares que abordan los años académicos de 7° año de Educación Básica a 2° año de Educación Media¹, comprenden en forma transversal habilidades de pensamiento en que subyace la habilidad de solucionar situaciones diversas. En la asignatura de Matemática, se señala:

“Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas” (p.104).

Del mismo modo y con respecto a los Estándares de Aprendizaje, descritos para 8° año de Educación Básica, el Nivel de Aprendizaje Adecuado en el contexto de la resolución de problemas en la asignatura de Matemática establece que las y los estudiantes deben:

“(…) mostrar generalmente que son capaces de aplicar conocimientos y habilidades de razonamiento matemático en situaciones directas y en problemas de varios pasos en los que se requiere elección de datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado”² (p. 10).

Asimismo, el currículum nacional potencia el logro de objetivos de aprendizaje que articulan el desarrollo de contenidos, habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática. En este contexto, es importante analizar y ejemplificar cómo las habilidades matemáticas descritas para 7° y 8° año de Educación Básica aportan a la formación de un ciudadano para resolver e

1. Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.
2. Ministerio de Educación de Chile (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática.

interpretar problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, para lo cual se requiere de un alto nivel de comprensión de las matemáticas y de razonamiento matemático.

Por otra parte, la formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (Mineduc, 2013). Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

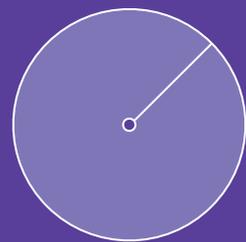
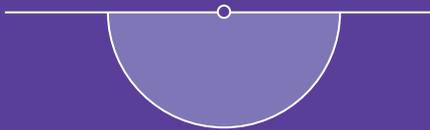
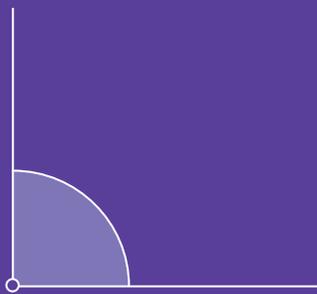
Para lograrlo, es necesario que los ciudadanos desarrollen el **razonamiento matemático**, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a un estudiante que aplique la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos matemáticos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él, que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite aplicar conocimiento y comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la **resolución de problemas**. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por una parte, que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. Otro de los énfasis del currículum de matemática consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de **representación** (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal, o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Las Bases Curriculares dan relevancia al **modelamiento matemático**. El objetivo de desarrollar la habilidad de

modelamiento matemático es lograr que las y los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos. Asimismo, [las habilidades comunicativas y argumentativas](#) son centrales en este escenario, estas se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

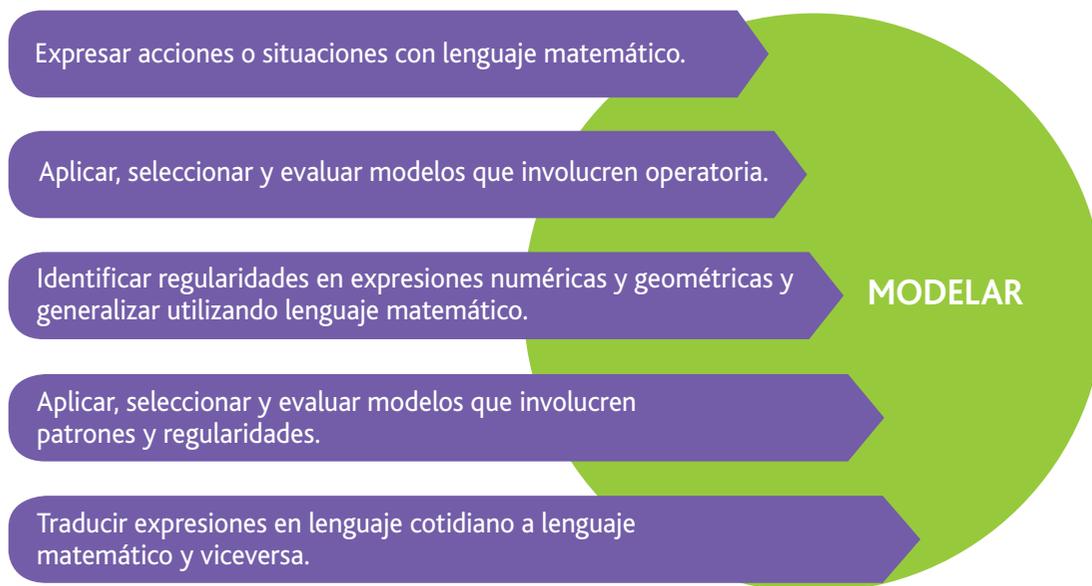
Por lo tanto, aprender a ser docente de matemáticas implica desarrollar, entre otras, la competencia de planificar, aplicar y analizar estrategias e instrumentos de evaluación adaptados a las características de las competencias matemáticas desarrolladas por las y los estudiantes (Font y Godino, 2011). Además, como docentes de matemáticas, sabemos que debemos escuchar más a las y los estudiantes y, sobre todo, formular preguntas que permitan al docente generar oportunidades de aprendizaje. Es responsabilidad nuestra ir avanzando en el manejo del cuaderno como un instrumento de trabajo y un registro que permite obtener evidencia de aprendizaje.

Habilidad de **modelamiento matemático**



¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que permitan el desarrollo de la **habilidad de modelamiento matemático**?

La habilidad de modelamiento implica “traducir” una situación del mundo real a la matemática (Blum, 2012), es decir, expresar acciones o situaciones cotidianas con lenguaje matemático, aplicar-seleccionar-evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa. A continuación se presentan procesos clave que procuran desarrollar la habilidad de Modelamiento matemático.



En esta propuesta procuraremos orientar el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático al resolver problemas, argumentar y representar. Además, presentamos las habilidades y conocimientos implícitos en la modelación de una situación cotidiana o de un contexto aritmético (generalización de los números impares), como también algunas sugerencias de cómo realizar una gestión de clase que permita generar oportunidades de aprendizaje significativas para las y los estudiantes.

Desafío en el contexto del mundo real

- Categorías de contenido matemático: cantidad; incertidumbre y datos; cambio y relaciones; espacio y forma.

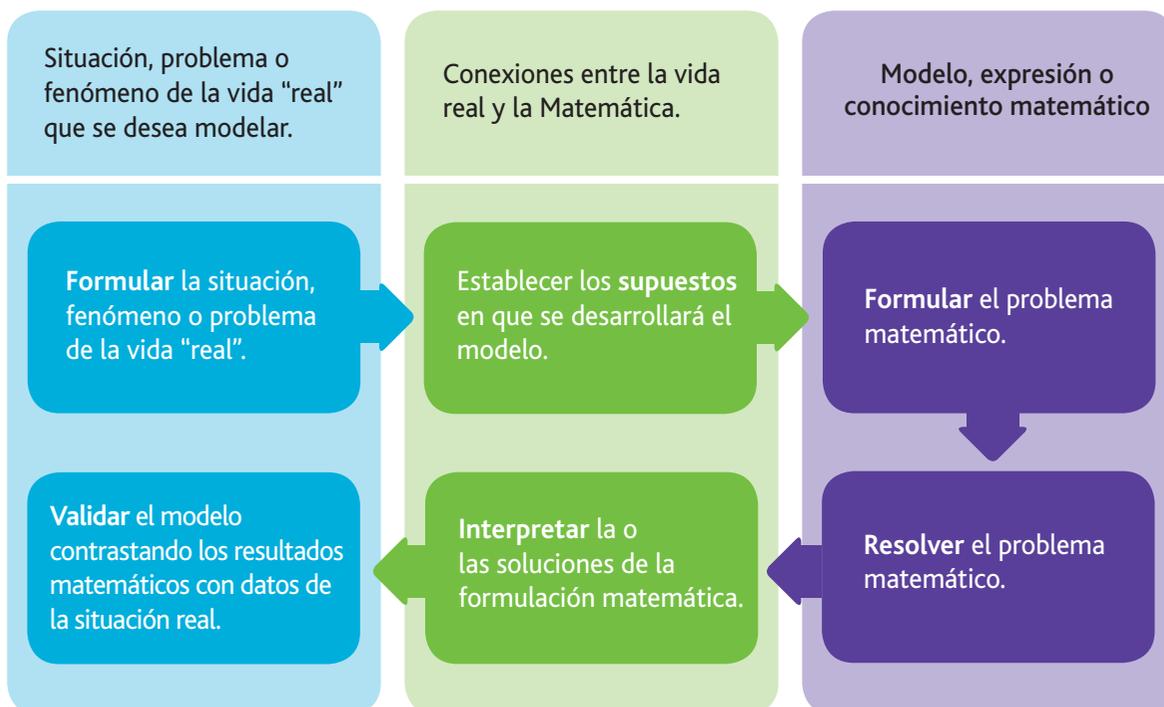
- Categorías de contexto del mundo real: personal; social; profesional; científico.

Pensamiento y acción matemática

- Conceptos, conocimientos y destrezas matemáticas.
- Capacidades matemáticas fundamentales: comunicación; representación; diseño de estrategias; matematización; razonamiento y argumentación; utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; utilización de herramientas matemáticas.
- Procesos: formular, emplear, interpretar/valorar.



En otras palabras, modelar significa resolver problemas complejos del mundo real y de la propia matemática a través del lenguaje matemático. La idea principal del modelamiento es la creación de un modelo, que representa en forma simplificada la realidad. En este proceso se toman en cuenta solamente aspectos relevantes que ayudan a responder una pregunta hecha con respecto al problema real.

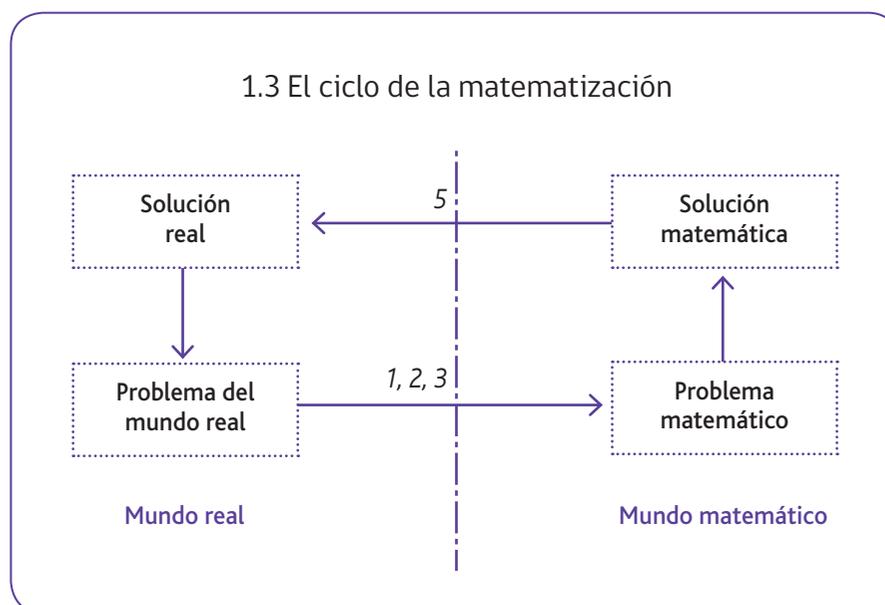


Adaptado de: Mathematical Modelling. D.N. Burhens y M.S. Borrie en, Alan rogersen (Ed) (1978). The ICSU Committee on the Teaching of Science.

El modelamiento matemático busca que las y los estudiantes tengan la oportunidad de analizar, razonar y transmitir ideas matemáticas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones cotidianas. Este tipo de resolución de problemas exige a las y los estudiantes cinco etapas que se describen a continuación:

- ▶ Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
- ▶ Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
- ▶ Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos tales como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello revela los rasgos matemáticos de la situación cotidiana y transforma el problema real en un problema matemático.
- ▶ Se resuelve el problema matemático.
- ▶ Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

Como sugiere el diagrama del Cuadro 1.3, los cinco aspectos se tratan en tres fases.



Adaptado de Blum y Leiss (2005)

Según De Lange (1987), este proceso engloba actividades tales como:

- ▶ Identificar los elementos matemáticos pertinentes en relación a un problema situado en la realidad;
- ▶ representar el problema de un modo diferente a la lengua materna, organizándolo entre otras cosas de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas;
- ▶ comprender las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente;
- ▶ localizar regularidades y relaciones;
- ▶ traducir el problema en términos matemáticos, es decir, en términos de un modelo matemático.

Además, en la construcción de modelos hay que considerar:

- ▶ Estructurar el campo o situación que se quiere modelar.
- ▶ Traducir la realidad a estructuras matemáticas.
- ▶ Interpretar los modelos matemáticos en términos de "realidad".
- ▶ Trabajar con un modelo matemático.
- ▶ Validar el modelo.
- ▶ Reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados.
- ▶ Comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados).
- ▶ Supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.

<http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf>

A continuación se presentan problemas que procuran desarrollar las habilidades de resolver, representar, y en especial, el modelamiento matemático. Cabe señalar que cada problema corresponde a una ejemplificación y no se afirma que estos deban ser los únicos problemas a resolver para otorgar oportunidades de aprendizaje a las y los estudiantes.

Problema: En una secuencia de partidas y detenciones, un ascensor viaja desde el primer piso al quinto piso y luego al segundo; desde ahí, al cuarto piso, y luego al tercero. Si cada piso tiene una altura aproximadamente 3 metros, ¿qué distancia habrá recorrido el ascensor?

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una primera etapa) de manera concreta.

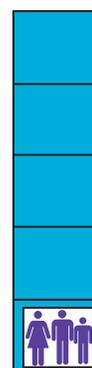
A: Con una foto



B: Con material concreto



C: Con un dibujo



Anote la cantidad de los pisos recorridos. Para ello avance y retroceda según los datos entregados en la actividad.

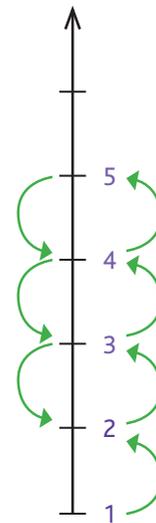
- ▶ Sube 4 pisos, baja 3 pisos, sube 2 pisos, baja 1 piso: recorre en total 10 pisos.
- ▶ Entre un piso y el otro hay 3 m.
- ▶ $10 \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ m}$.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una segunda etapa) de manera pictórica.

D: En una tabla

| Viaja entre | Cantidad de pisos recorridos |
|-------------|------------------------------|
| 1° al 5° | 4 pisos |
| 5° al 2° | 3 pisos |
| 2° al 4° | 2 pisos |
| 4° al 3° | 1 piso |

E: En la recta numérica invertida



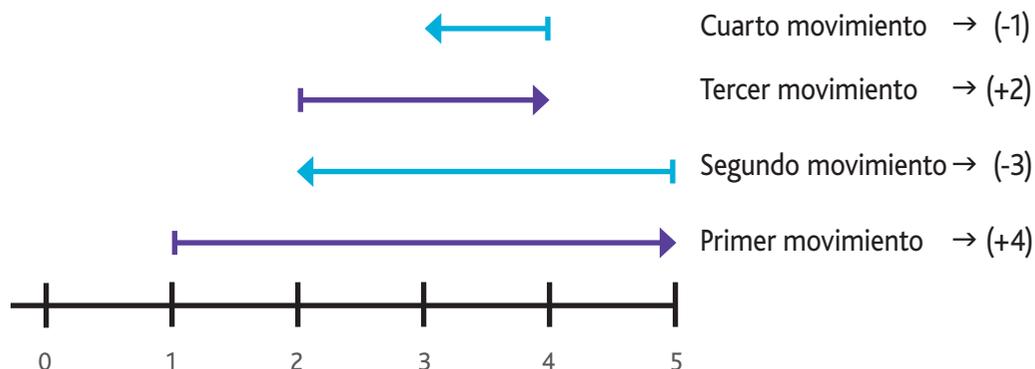
Anote en una tabla la cantidad de los pisos recorridos y/o realice los movimientos en la recta invertida avanzando según los datos entregados en la actividad.



En total 10 pisos; entre un piso y el otro hay 3m $\rightarrow 10 \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ m}$.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una tercera etapa) usando la recta numérica y vectores

Se representa la situación en la recta numérica: "sube" con vectores hacia la derecha, "baja" con vectores hacia la izquierda.



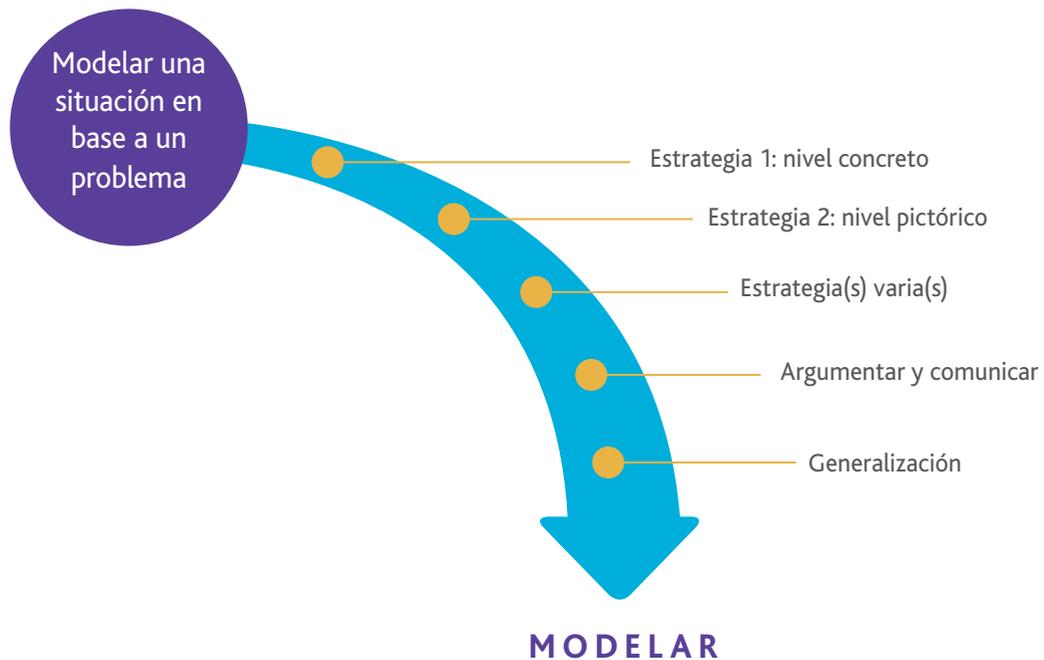
Movimientos: $4 - 3 + 2 - 1 = 2$. La dirección y sentido del vector del "cuarto movimiento" es contrario al "tercer movimiento", lo cual implica finalizar el movimiento en el número 3. El número 3 resulta al sumar el número 1 ("partida del ascensor") con el número 2 que resulta del cálculo de los cuatro movimientos considerándolos como números positivos y negativos según corresponda. ¡La suma de enteros indicaría una posición, lo que nos permite encontrar la respuesta al problema!

Para calcular la distancia que recorrió el ascensor, hay que considerar la cantidad de pisos cada vez que sube o baja. La medida se puede calcular con el **valor absoluto** de un número entero. Ejemplo: Sube dos pisos el ascensor implica $|+2|= 2$; Baja dos pisos el ascensor implica $|-2|= 2$

- ▶ El valor absoluto de esta suma: $|+4| + |-3| + |+2| + |-1| = 10$
- ▶ Se calcula: $4+3+2+1 = 10$
- ▶ Distancia recorrida: 10 pisos, $10 \cdot 3\text{m} = 30\text{ m}$
- ▶ Respuesta: El ascensor recorrió 30 m en total.



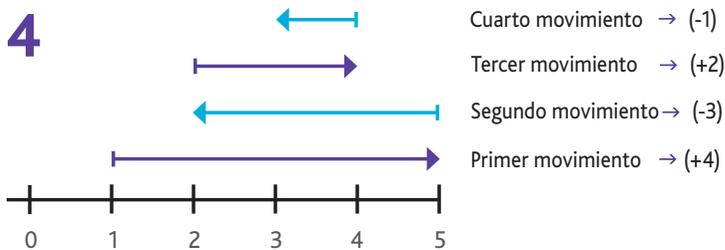
¿Qué implica el proceso de modelamiento matemático?



Modelar una situación problemática implica el desarrollo holístico de las etapas 1, 2, 3, 4 y la construcción misma del modelo.

1**Ejemplo**

En una secuencia de partidas y detenciones, un ascensor viaja desde el primer piso al quinto y luego al segundo; desde ahí, va al cuarto piso y luego al tercero. Si cada piso tiene una altura de 3 metros, ¿qué distancia habrá recorrido el ascensor?

**2****4**

| Viaja entre | Cantidad de pisos recorridos |
|-------------|------------------------------|
| 1° al 5° | 4 pisos |
| 5° al 2° | 3 pisos |
| 2° al 4° | 2 pisos |
| 4° al 3° | 1 piso |

3**M**ODELO

$$|+4| + |-3| + |+2| + |-1| = 10$$

$$10 \cdot 3\text{m} = 30\text{ m}$$

El recorrido se modela en este caso con la suma de los valores absolutos de los números enteros.

Sugerencia de problemas para potenciar la habilidad de modelamiento matemático.

- Una persona tiene un saldo inicial de \$ 50 000 en su cuenta bancaria, hace un giro de \$ 25 000 y luego otro giro de \$ 35 000. ¿Cuál es el saldo actual en su cuenta?

MODELO

Saldo inicial: \$ 50 000

Primer giro: $\$ 50\,000 - \$ 25\,000 = \$ 25\,000$

Segundo giro: $\$ 25\,000 - \$ 35\,000 = - \$ 10\,000$

El resultado - \$ 10 000 significa "deuda" o "utilizar la línea de crédito bancaria". Por ende, el modelo aritmético implica interpretar los resultados positivos como saldo a favor y los resultados negativos como deuda.

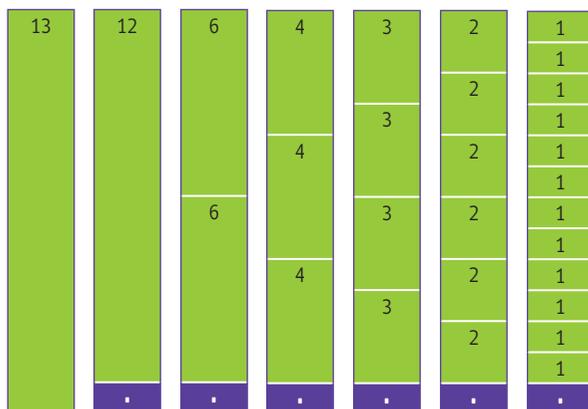
- En un frigorífico la temperatura es de -27°C . Después de un corte de luz a las 12:00 horas, la temperatura empieza a subir aproximadamente 2°C cada media hora. ¿Cuál es la temperatura a las 15:00 horas? ¿Cuánto ha variado la temperatura desde el corte de luz? ¿Es correcto decir que la temperatura aumentará constantemente 2°C ?
- ¿Cuál es la diferencia en metros entre la cima de la montaña Ojos del Salado, de $6\,891\text{ m}$ de altura aproximadamente, y la Fosa del Pacífico, que tiene una profundidad de $7\,302\text{ m}$? Justifica tu respuesta.

Modelamiento matemático como habilidad principal en el eje de Álgebra y Funciones

Problema: Una familia quiere comprar un auto nuevo y opta por la oferta de un financiamiento variable y personalizado. El auto tiene un precio de \$ 13 000 000. En el financiamiento "crédito fácil" se requiere un pie de \$ 1 000 000 y el resto se puede pagar dentro de un año con un número fijo de cuotas que se puede elegir entre 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Si usted elige 3 cuotas, debe pagar la primera cuota al cuarto mes, la segunda cuota al octavo mes y la tercera cuota al cumplir el año. Los intereses son de 2% mensuales que se refieren a la deuda pendiente y se cobran al fin del periodo de la cuota. En la casa la familia pensó varios modelos posibles para financiar la compra.

- Generar conjeturas con la pregunta:** ¿Qué influencia tiene el número de cuotas en el monto de la cuota? Verificar la veracidad o falsedad de cada conjetura.
- Generar conjeturas con la pregunta:** ¿Con qué modelo de financiamiento el gasto total sería mínimo o máximo? Verificar la veracidad o falsedad de cada conjetura.

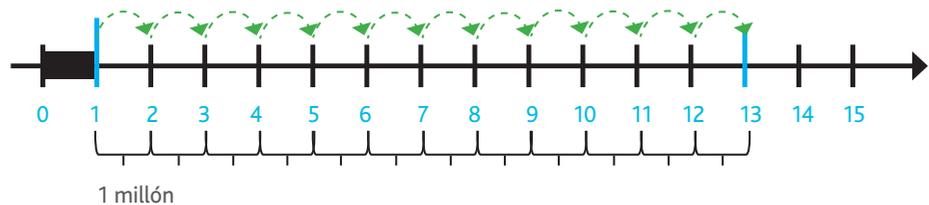
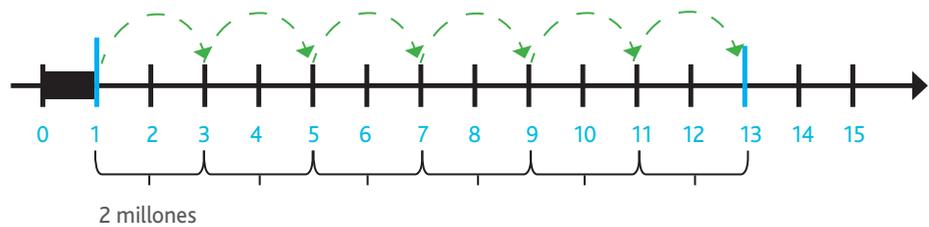
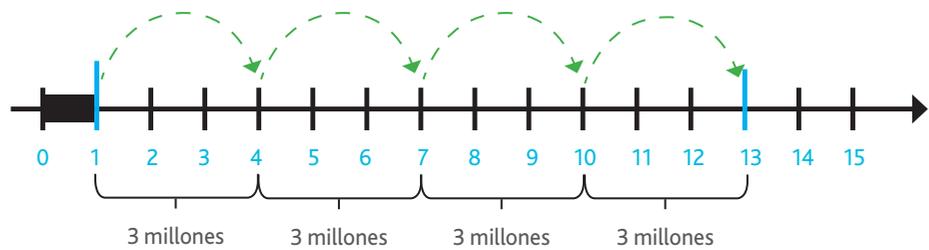
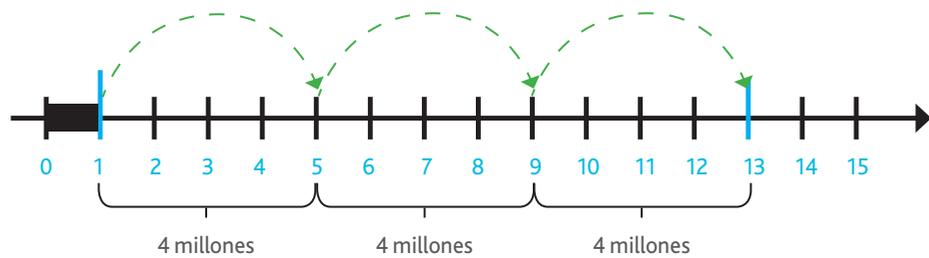
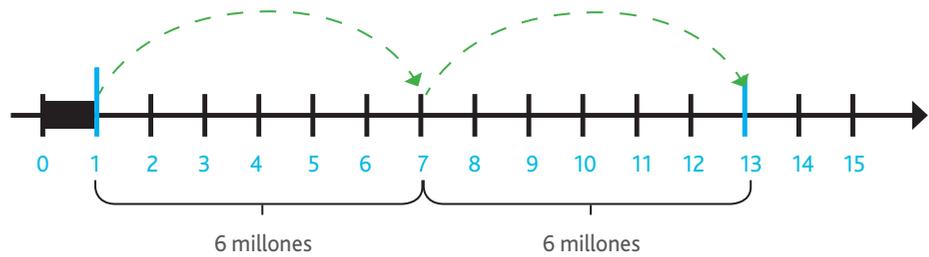
Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una primera etapa) de manera concreta: con bloques de madera o cintas de cartón. (1cm de altura corresponde a \$ 1 000 000).



Verificación de la conjetura 1):
A mayor cantidad de cuotas, menor es el valor del monto de cada una de ellas, sin considerar el interés del 2% mensual.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una segunda etapa) de manera pictórica en la recta numérica sin considerar aún el interés del 2% mensual.

El número 1 corresponde a 1 millón



Verificación de la conjetura 1):
Mientras más cuotas hay, menos alto es su monto.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo (en una tercera etapa) a través de ecuaciones sin considerar aún el interés del 2% mensual.

En **1** cuota: $1\ 000\ 000 + 1 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 12\ 000\ 000$

En **2** cuotas: $1\ 000\ 000 + 2 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 6\ 000\ 000$

En **3** cuotas: $1\ 000\ 000 + 3 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 4\ 000\ 000$

En **4** cuotas: $1\ 000\ 000 + 4 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 3\ 000\ 000$

En **6** cuotas: $1\ 000\ 000 + 6 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 2\ 000\ 000$

En **12** cuotas: $1\ 000\ 000 + 12 \cdot x = 13\ 000\ 000$

Monto de la cuota: $x = 1\ 000\ 000$

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, a continuación corresponde realizar el proceso de modelamiento para calcular el valor de cada cuota, pero sin considerar todavía el 2% de interés mensual.

Modelo matemático

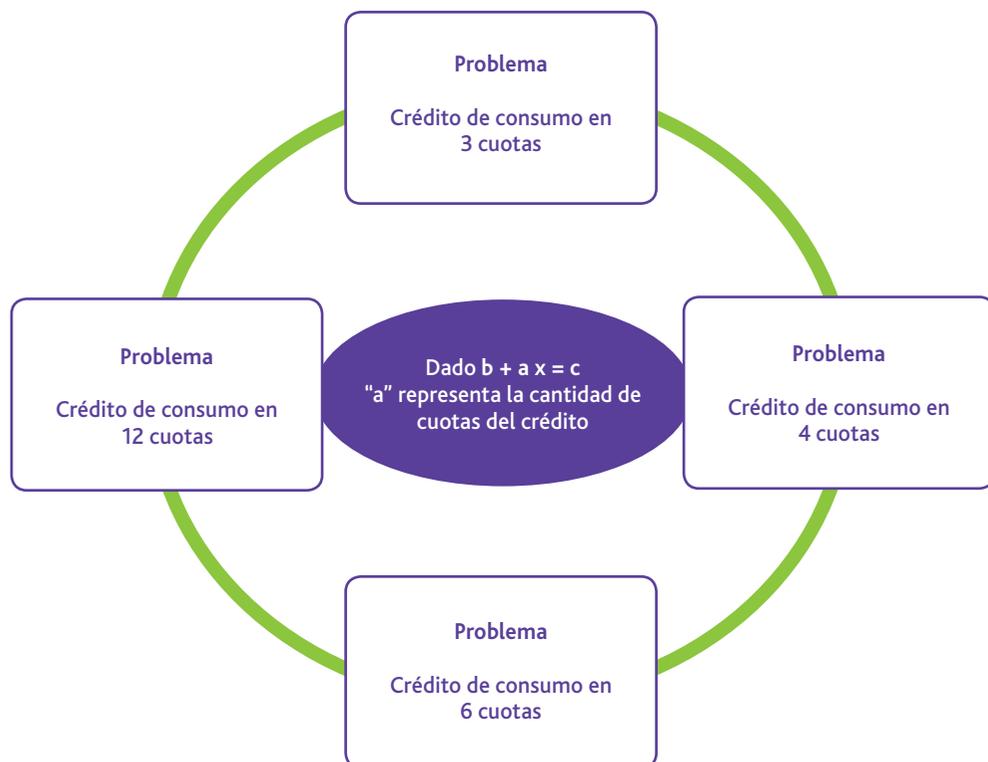
Ecuación lineal de la forma

$$1\ 000\ 000 + ax = 13\ 000\ 000 \text{ con } a = 1, 2, 3, 4, 6 \text{ y } 12$$

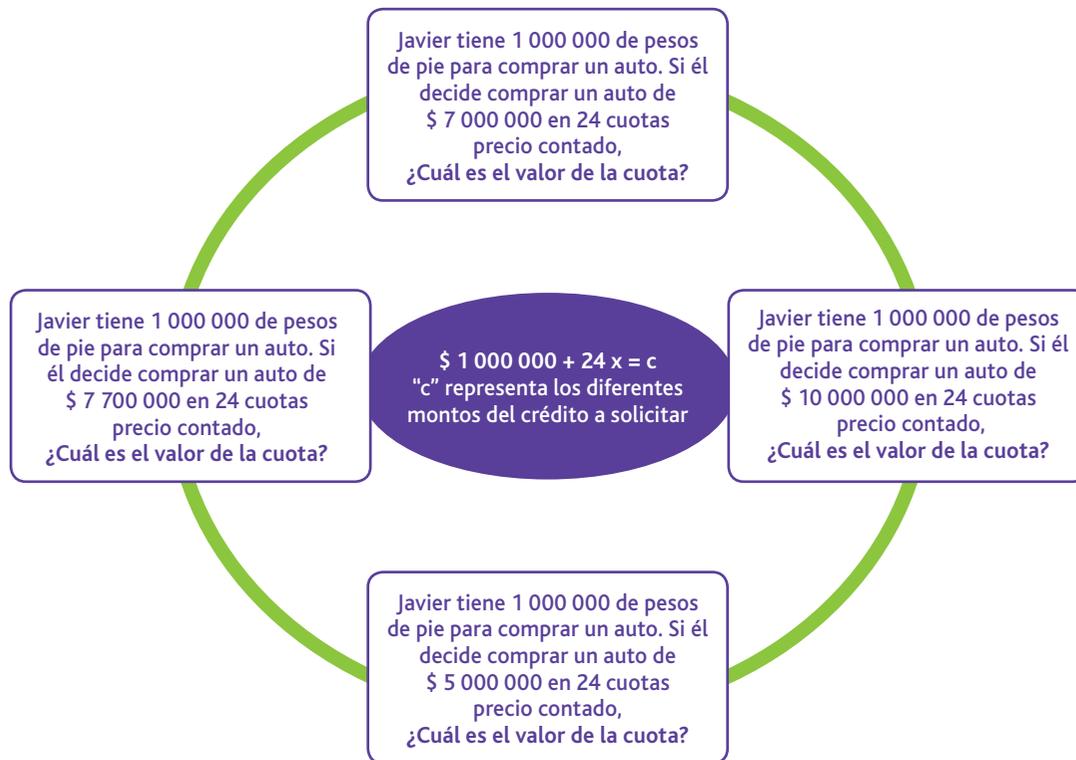
OA 9 7°Básico: Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones de la forma: $ax + b = c$

Posteriormente, el o la docente debe promover la formulación de problemas para potenciar, en una primera etapa, la habilidad de modelamiento matemático. Uno de los principales focos de ese modelamiento dice relación con ofrecer oportunidades de aprendizaje a las y los estudiantes para que comprendan que diferentes situaciones de la vida cotidiana se pueden resolver bajo un mismo modelo aritmético o algebraico. Por ejemplo, podrían responder las siguientes interrogantes: ¿Qué relación hay entre la cantidad de cuotas del crédito y la ecuación $b + a x = c$? ¿Qué situaciones o fenómenos de la vida cotidiana se pueden resolver mediante $1\ 000\ 000 + a x = 13\ 000\ 000$?

Modelo algebraico: $b + a x = c$

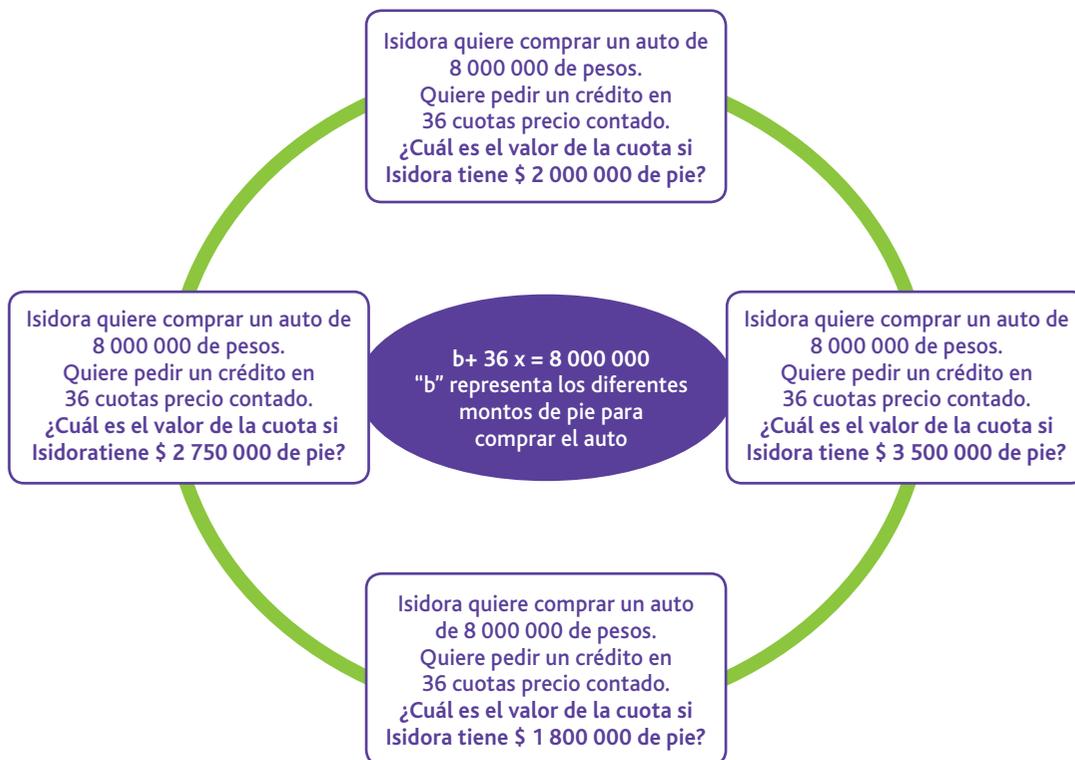


Si el número de cuotas es 24, el pie nuevamente es de \$ 1 000 000, la tasa de interés es del 0% mensual y varía el monto del crédito, **¿Qué situaciones y posible modelo se pueden construir?**



Modelo: $1\,000\,000 + 24x = c$, "c" es el valor del monto del crédito

Si el número de cuotas es 36, la tasa de interés es de 0% mensual, el monto del crédito es \$ 8 000 000 y varía el monto del pie. **¿Qué situaciones y posible modelo se pueden construir?**



Modelo: $b + 36x = 8\,000\,000$, "b" es el valor del pie para comprar el auto.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, a continuación corresponde realizar el proceso de modelamiento (utilizando la línea recta) para calcular el valor de cada cuota (crédito en 2 cuotas) considerando el 2% de interés mensual.

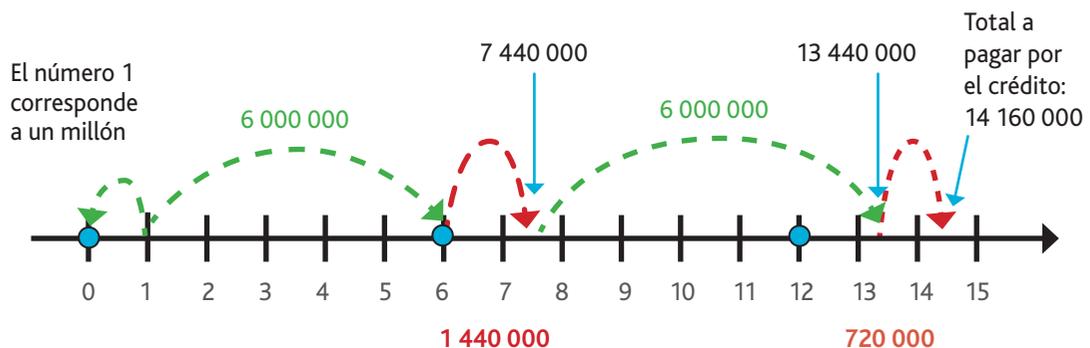
Se representa el modelamiento del crédito para los \$ 12 000 000 restantes que se deben financiar, en este caso, en 2 cuotas con un monto de:

$\frac{\$ 12\,000\,000}{2} = \$ 6\,000\,000$ cada una (En los \$ 6 000 000 no están considerado los intereses del crédito). Los intereses del primer período se refieren a la deuda inicial que es de \$ 12 000 000.

Los intereses para este período tienen un monto de:

\$ 1 440 000 ($2\% \cdot \$ 12\,000\,000 \cdot 6$ meses) que se valida al final del período y se agregan a la deuda. Resulta en la cuenta un saldo de \$ 13 440 000. Al mismo tiempo se cancela el monto fijo de la cuota junto con los intereses y se llega a la deuda restante de \$ 6 000 000. Al final del segundo y último período se validan los intereses que se basan en el resto de la deuda \$6 000 000 resultando un monto de \$ 720 000 ($2\% \cdot \$6\,000\,000 \cdot 6$ meses).

Por último, se agregan los intereses a la deuda. Resulta en la cuenta un saldo de \$ 6 720 000. El deudor cancela la parte fija de \$6 000 000 más los intereses de \$ 720 000 y llega a un saldo de \$ 0.



Como se representa en la recta numérica, el saldo inicial ($t = 0$) de la deuda es $D(0) = 12\,000\,000$. La cancelación de la deuda se modela en forma recursiva por intervalos (períodos) de tiempo. El $t = 1$ significa el final del primer intervalo (período), $t = 2$ significa el final del segundo intervalo (período) $D(t)$ significa la deuda al final del intervalo con el número t . Cantidad de intervalos (períodos) a considerar es $k = 2$

$$D(0) = 12\,000\,000$$

$$\begin{aligned} D(1) &= 12\,000\,000 + 12\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{2} - \left(\frac{12\,000\,000}{2} + 12\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{2} \right) \\ &= 12\,000\,000 + 1\,440\,000 - (6\,000\,000 + 1\,440\,000) \\ &= 6\,000\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(2) &= 6\,000\,000 + 6\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{2} - \left(\frac{12\,000\,000}{2} + 6\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{2} \right) \\ &= 6\,000\,000 + 720\,000 - (6\,000\,000 + 720\,000) \end{aligned}$$

$$= 0$$

Modelo matemático

En general con $D(0) = 12\,000\,000$, k cantidad de períodos y porcentaje mensual de $p\%$

$$D(t+1) = D(t) + D(t) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{12}{k} - \left(\frac{D(0)}{k} + D(t) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{12}{k} \right)$$

Con esta función definida en forma recursiva se puede verificar los cálculos representados en las tablas.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, a continuación aplicaremos el proceso de modelamiento para calcular el valor de cada cuota (crédito en 3 cuotas) considerando el 2% de interés mensual.

Como se representa en la recta numérica, el saldo inicial ($t=0$) de la deuda es $D(0) = 12\,000\,000$. La cancelación de la deuda se modela en forma recursiva por intervalos (períodos) de tiempo. $t=1$ significa el final del primer intervalo (período), $t=3$ significa el final del tercer intervalo (período)

$D(t)$ significa la deuda al final del intervalo con el número t .

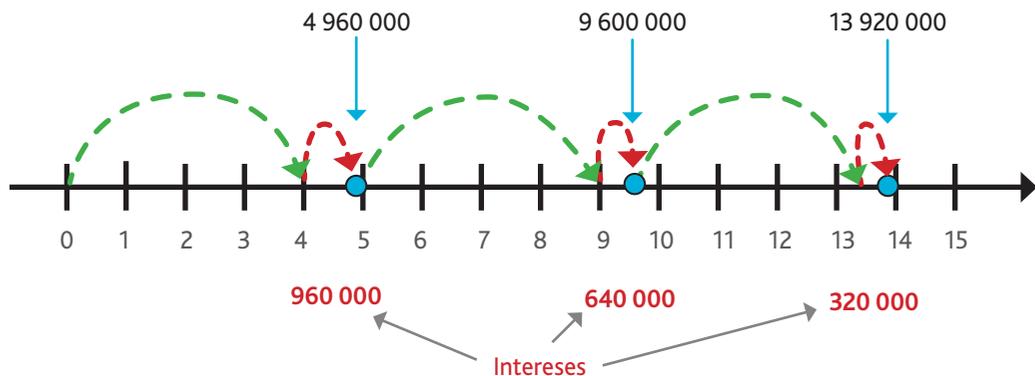
Cantidad de intervalos (períodos) $k=3$

$$D(0) = 12\,000\,000$$

$$\begin{aligned} D(1) &= 12\,000\,000 + 12\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} - \left(\frac{12\,000\,000}{3} + 12\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} \right) \\ &= 12\,000\,000 + 960\,000 - (4\,000\,000 + 960\,000) \\ &= 8\,000\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(2) &= 8\,000\,000 + 8\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} - \left(\frac{12\,000\,000}{3} + 8\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} \right) \\ &= 8\,000\,000 + 640\,000 - (4\,000\,000 + 640\,000) \\ &= 4\,000\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(3) &= 4\,000\,000 + 4\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} - \left(\frac{12\,000\,000}{3} + 4\,000\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{12}{3} \right) \\ &= 4\,000\,000 + 320\,000 - (4\,000\,000 + 320\,000) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Problema de crédito y modelamiento matemático: Prestación de un servicio que tiene un cobro fijo más un cobro variable en cuotas cuyo valor depende de la cantidad de cuotas: arriendo de un auto, inmueble, cuenta telefónica, de agua, de luz, entre otras.

Específicamente, el plan de financiamiento del crédito tiene varios cálculos repetitivos. Se muestra un esquema para cancelar el crédito en intervalos incluyendo los intereses.



Por ejemplo: Plan de financiamiento del crédito con 3 cuotas anuales y un porcentaje mensual de 2%.

Observación: El cálculo de los intereses se realiza favorablemente de la siguiente manera:

- ▶ 2% = 0,02
- ▶ 2% de 12 000 000 se calcula mediante el producto:
 $0,02 \cdot 12\ 000\ 000 = 240\ 000$

| Deuda inicial | Intereses por período | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------------------|
| 12 000 000 | 240 000 | 4 000 000 | 4 240 000 | 8 000 000 |
| 8 000 000 | 160 000 | 4 000 000 | 4 160 000 | 4 000 000 |
| 4 000 000 | 80 000 | 4 000 000 | 4 080 000 | 0 |
| total | 480 000 | 12 000 000 | 12 480 000 | |

Problema 1: Elaborar un plan de financiamiento de los créditos en 1 cuota al fin del año.

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-------------|
| 12 000 000 | | | | |

Problema 2: Elaborar un plan de financiamiento de los créditos con 2 cuotas anuales.

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 12 000 000 | | | | |
| | | | | |
| total | | | | |

Problema 3: Elaborar un plan de financiamiento de los créditos con 4 cuotas anuales.

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 12 000 000 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| total | | | | |

Problema 4: Elaborar un plan de financiamiento del crédito 6 cuotas mensuales.

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 12 000 000 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| total | | | | |

Problema 5: Elaborar un plan de financiamiento del crédito 12 cuotas mensuales.

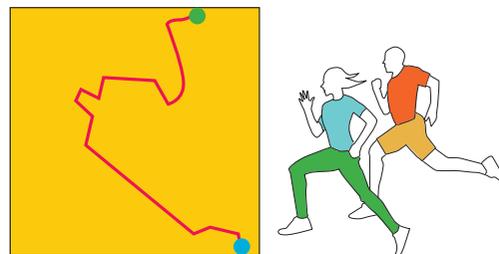
| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 12 000 000 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| total | | | | |

Verificación de la conjetura 2):

El crédito en la variante con más cuotas es más cómodo y además el total de los intereses es mínimo.

Modelar situaciones de la vida diaria con ecuaciones

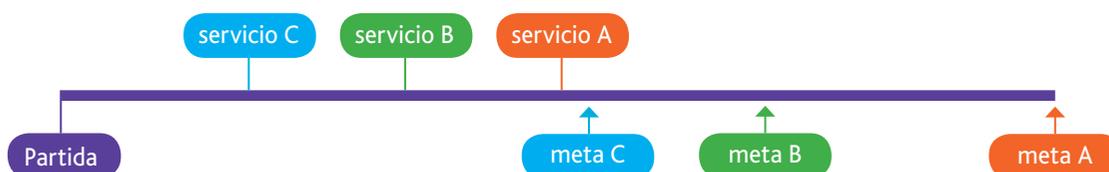
Problema 1: Se está planificando una maratón en tres categorías A, B y C. La primera categoría es para atletas con buen rendimiento, la segunda para deportistas familiares y la tercera para principiantes. Según las categorías A, B y C se recorre 42 km, 21 km y 15 km respectivamente. Los organizadores quieren instalar, a partir de un cierto recorrido, mesas de servicio para tomar bebidas isotónicas. Las estaciones se reparten en tramos equidistantes hasta la meta.



Se solicita:

- Confeccionar un dibujo esquemático en el cual aparezcan los datos de la maratón.
- Plantear una ecuación mediante la cual se pueda modelar el cálculo de las distancias entre las estaciones de servicio, considerando los siguientes parámetros-variables: recorrido total, recorrido a partir del cual se instalan las estaciones de servicio y cantidad de estaciones de servicio.
- En la categoría A se quiere empezar en el kilómetro 12, con 8 ó 6 estaciones dependiente de las condiciones del tiempo. Calcular las distancias entre las estaciones.
- En la categoría B se planifica el inicio del servicio a partir del kilómetro 9, con 6 o 4 estaciones. Calcular las distancias entre las estaciones.
- En la categoría C se planifica un servicio con 12 u 8 estaciones repartidas a lo largo del recorrido. Calcular las distancias entre las estaciones.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo de manera pictórica a través de un esquema.



- a) $b + ax = c$; con c recorrido total, b punto del inicio del servicio, a cantidad de las estaciones.
- b) Distancia 42 km; inicio del servicio en el km 12, día caluroso 8 estaciones, ecuación: $12 + 8x = 42$; $x = 3,75$ km día frío 6 estaciones, ecuación: $12 + 6x = 42$; $x = 5$ km
- c) Distancia 21 km; inicio del servicio en el km 9; día caluroso 6 estaciones, ecuación: $9 + 6x = 21$; $x = 2$ km; día frío 4 estaciones, ecuación: $9 + 4x = 21$; $x = 3$ km
- d) Distancia 15 km; estaciones repartidas a lo largo de todo el recorrido; día caluroso 12 estaciones; ecuación: $12x = 15$; $x = 1,25$ km; día frío 8 estaciones ; ecuación: $8x = 15$; $x = 1,875$ km

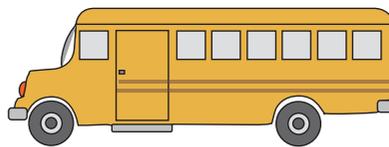
Modelo matemático

Ecuación de primer grado

$$9 + 6x = 21$$

$$9 + 4x = 21$$

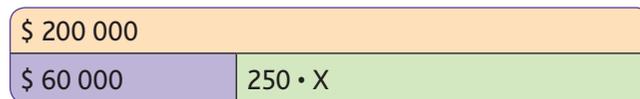
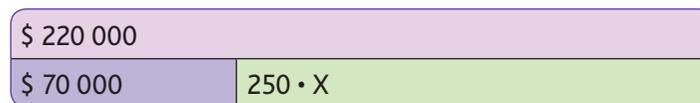
Problema 2: Dos cursos, A y B, del 7° año básico de un colegio planifican un viaje de estudio de aproximadamente 250 km. El curso A quiere gastar todo su ahorro de \$ 220 000 y el curso B también quiere gastar todo su ahorro, que es de \$ 200 000. Se sabe que los gastos fijos para un bus del curso A son de \$ 70 000 más un cierto costo para cada kilómetro recorrido. Para el curso B los gastos fijos son de \$ 60 000 más un cierto monto para cada kilómetro recorrido.



Se solicita:

- a) Confeccionar un dibujo esquemático en el cual aparezcan los datos del viaje de estudio.
- b) Elaborar una ecuación mediante la cual se pueda modelar el cálculo del costo máximo para cada kilómetro de recorrido en los diferentes cursos, variando el gasto fijo y el ahorro.
- c) Calcular para ambos cursos el monto para cada kilómetro del recorrido.
- d) Conjeturar sin realizar ningún cálculo directo: ¿Con qué gasto fijo, el curso B tendría el mismo costo para cada kilómetro recorrido? Argumentar y comunicar la conjetura.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo de manera pictórica a través de un esquema y generar oportunidades de aprendizaje de argumentación.



- a) $b + ax = c$; con **b** gasto fijo, **a** recorrido aproximado en km, **c** ahorro del curso.
- b) Curso A: ecuación: $70\,000 + 250x = 220\,000$; $x = 600$ (pesos por kilómetro)
Curso B: ecuación: $60\,000 + 250x = 200\,000$; $x = 560$ (pesos por kilómetro)
- c) Con un gasto fijo de \$50 000 tendrían el mismo monto a disposición para el kilometraje como el curso A y por lo tanto se daría el mismo monto por kilómetro.

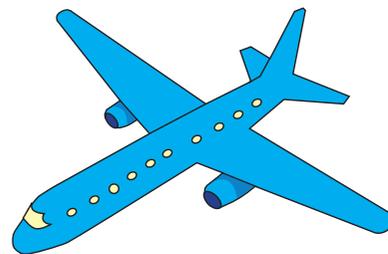
Modelo matemático

Ecuación de primer grado

$$70\,000 + 250x = 220\,000$$

$$60\,000 + 250x = 200\,000$$

Problema 3: Un vuelo entre Santiago de Chile y Los Ángeles (EEUU) tiene una distancia de 9 000 km. En el interior de la cabina se transmiten cada minuto datos actuales del vuelo, tales como distancia recorrida y distancia al destino. Con el piloto automático prendido, el avión vuela a velocidad constante considerando, por ejemplo, los siguientes datos:



- i) "distancia recorrida 3 000 km" y "distancia al destino 6 000 km".
- ii) "distancia recorrida 3 016 km" y "distancia al destino 5 984 km".

Se solicita:

- a) Dibujar un esquema con los datos del recorrido y distancia al destino.
- b) ¿Qué ecuación permite modelar el cálculo de la "distancia recorrida" r y de la "distancia que falta al destino" f en cada minuto del vuelo basándose en los datos del problema?
- c) Las distancias, ¿se pueden calcular mediante las ecuaciones elaboradas hasta el aterrizaje? Argumentar y comunicar la respuesta.
- d) **Desafío:** Elaborar en general una ecuación mediante la cual se puede modelar el cálculo de una "distancia recorrida" y una "distancia al destino", si se pueden variar los siguientes parámetros: recorrido del avión por minuto, distancia total, distancia recorrida y distancia faltante.

Entendiendo que el foco es desarrollar la habilidad de modelar, el problema nos permite resolverlo de manera pictórica a través de un esquema y generar oportunidades de aprendizaje de argumentación.

| | |
|------------------|------------------|
| d 9 000km | |
| r 3 000km | f 6 000km |
| r 3 500km | f 5 500km |

- Recorrido actual: 3 000 km; distancia actual al destino: 6 000 km; distancia recorrida por hora: 960 km ecuación del recorrido: $r = 3\,000 + 960x$ (x horas a partir del momento inicial considerado) ecuación del recorrido faltante $f = 6\,000 - 960x$ (x horas a partir del momento inicial considerado)
- Las ecuaciones elaboradas tienen validez solamente si no se cambia el recorrido por minuto. En la fase del descenso eso se disminuye y por lo tanto no se puede calcular hasta el aterrizaje.
- Desafío:** distancia d entre los destinos, distancia recorrida r , distancia recorrida al momento inicial R , distancia faltante f , distancia faltante al momento inicial F , recorrido por minuto a , ecuación para la distancia recorrida: $r = R + ax$ ecuación para la distancia faltante: $f = F - ax$ (con $F = d - R$).
Control: $r + f$ en cada momento debe ser igual a la distancia total:
 $r + f = R + ax + F - ax = F + R = d$

Modelo matemático

Ecuación de primer grado

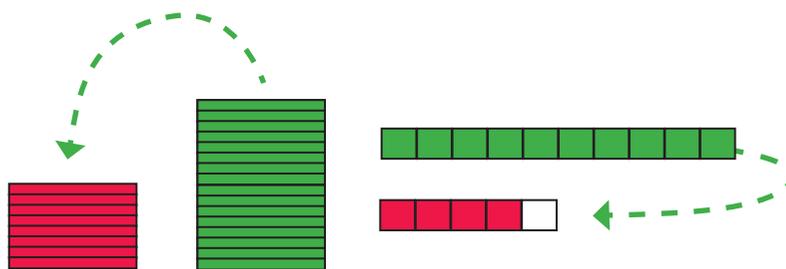
Ecuación del recorrido: $r = 3\,000 + 960x$
(x horas a partir del momento inicial considerado)

Ecuación del recorrido faltante $f = 6\,000 - 960x$
(x horas a partir del momento inicial considerado)

Problema 4: En el último partido de un torneo de fútbol escolar, los dos mejores equipos de la tabla juegan entre ellos. El equipo "verde" es nº 1 en la tabla de posiciones y tiene una victoria más que el equipo "rojo". Además tiene una diferencia de 19 goles a su favor mientras el equipo "rojo" cuenta con una ventaja de solo 7 goles. Antes de empezar el partido decisivo, el entrenador del equipo rojo les da ánimo a sus jugadores y dice: "Vamos a ganar y solo nos falta remontar la diferencia de goles entre ellos y nosotros. Ahora, como jugamos con ellos directamente, cada gol cuenta el doble".



- Conjeturar acerca del hecho de que, con el partido directo entre ambos equipos "cada gol cuenta el doble".
- Representar la situación en forma concreta con fichas o pictóricamente con columnas de casillas.
- Plantear una inecuación de la forma $b + x > c - x$ que modela la situación del equipo "rojo" que quiere saber con cuántos goles puede superar el equipo "verde" remontando la diferencia de goles que había antes del partido.
- Resolver la inecuación para saber con cuantos goles a su favor el equipo "rojo" superaría a los "verdes" para hacerse campeón.
- Con cada gol que convierte el equipo "rojo" contra el equipo "verde", la diferencia de goles en favor del equipo "verde" disminuye un punto y a la vez la diferencia de goles en favor del equipo "rojo" aumenta un punto.
- Apilar fichas que representan goles y darse cuenta de la disminución por 2 fichas si sacan una ficha verde y la ponen en la pila de las fichas rojas. En vez de usar fichas pueden pintar casillas.



- g) Inecuación para modelar la cantidad de goles que se debe convertir contra los "verdes" para superar la diferencia de goles que tiene este equipo en su favor: $7 + x > 19 - x$.
- h) $7 + x > 19 - x \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6$. El equipo "rojo" debe ganar con una diferencia mayor que 6 goles para superar la diferencia de goles que tiene el equipo "verde" en su favor.

Modelo matemático:

Inecuaciones

$$7 + x > 19 - x \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6$$

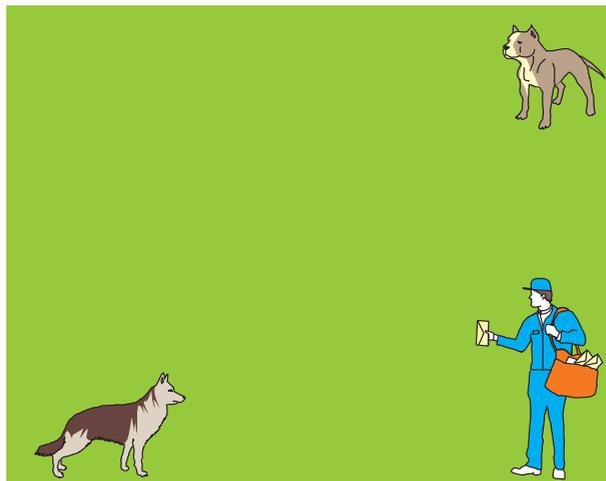
- i) El modelo anterior, ¿es aplicable cuando gana el equipo verde?

Modelamiento matemático como habilidad principal en el eje Geometría

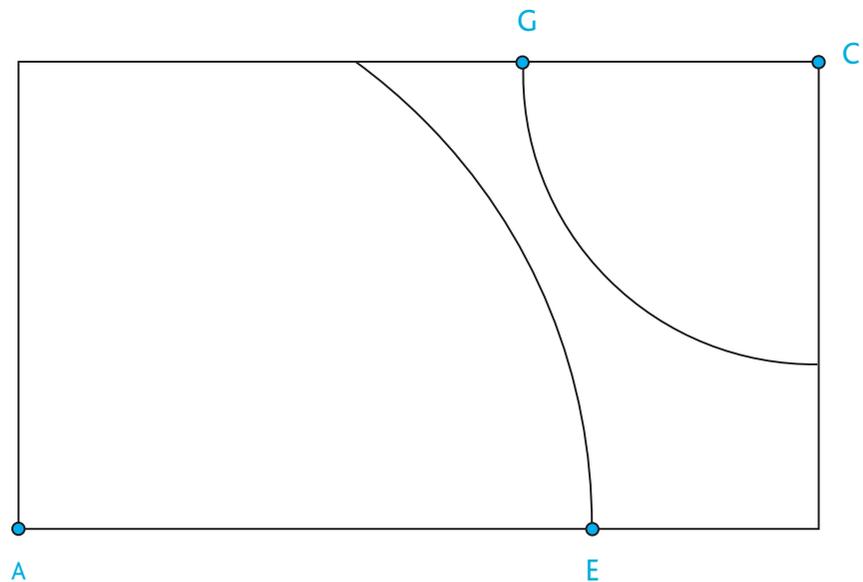
¿Qué significa modelamiento con Geometría? ¿Qué ejemplos de modelos geométricos aplicados a situaciones o fenómenos se pueden aplicar? ¿Cómo se relaciona el modelamiento con Geometría con otras habilidades, tales como representar, resolver problemas, argumentar o comunicar?

A partir de situaciones de la vida "real" hay que explorar esas preguntas y poner especial atención en los supuestos y el propósito de los modelos que creen las y los estudiantes.

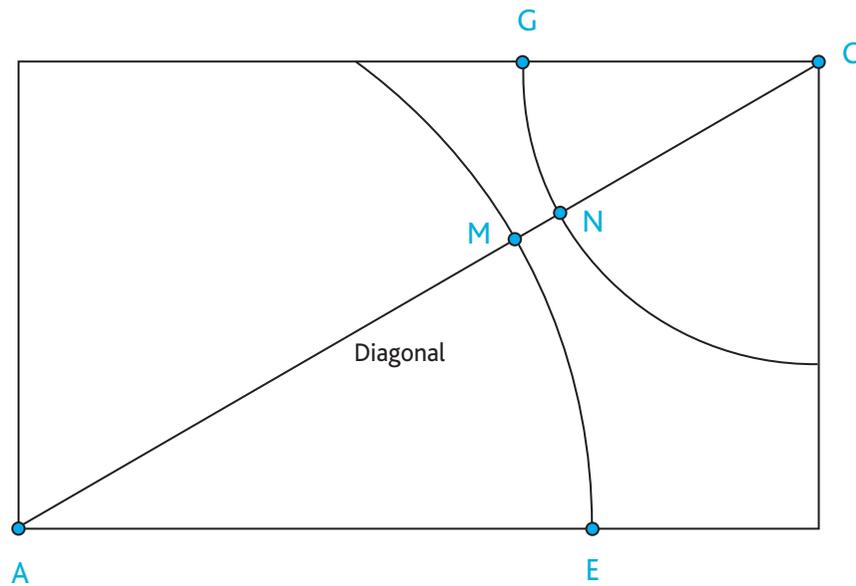
Problema 1: El cartero quiere cruzar el patio. En esquinas opuestas están atados dos perros. El de la esquina inferior izquierda puede alcanzar 8 metros. El de la esquina superior derecha, 6 metros. ¿Puede pasar el cartero sin que los perros lo muerdan? Haga una construcción geométrica para encontrar un camino recto por el que pueda transitar el cartero sin ser mordido.



- a) ¿Cuáles son las dimensiones de las cadenas y del patio para que el cartero pueda pasar sin correr peligro? Si el cartero está parado justo en el vértice inferior derecho del rectángulo y los perros siguen en las mismas condiciones, ¿cuáles podrían ser las dimensiones del patio para que el cartero pueda caminar en línea recta desde el punto en que está parado y hasta cruzar el lado superior, sin que los perros lo muerdan? Justifica tus respuestas.
- b) Si A es el vértice inferior izquierdo del patio, C el superior derecho y P un punto cualquiera del patio, r_1 el largo de la cadena del perro atada en A y r_2 el largo de la otra cadena, indique, en el dibujo, las zonas siguientes:
- $AP < r_1$
 - $CP < r_2$
 - $(AP > r_1)$ y $(CP < r_2)$



- c) ¿Cuál es el espacio mínimo entre los dos círculos? ¿Por dónde es seguro pasar?



¿Cuál es la distancia entre los dos círculos?

La distancia "d" entre los puntos M y N equivale a la longitud de la diagonal (D) menos la suma de la longitud de ambas cadenas (r_1 y r_2).

$$d = D - (r_1 + r_2)$$

¿Cómo calcular la longitud de la diagonal?

Usamos el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = a^2 + b^2 \text{ ("a" y "b", los lados del patio)}$$

De allí, extrayendo raíz, tenemos:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2}$$

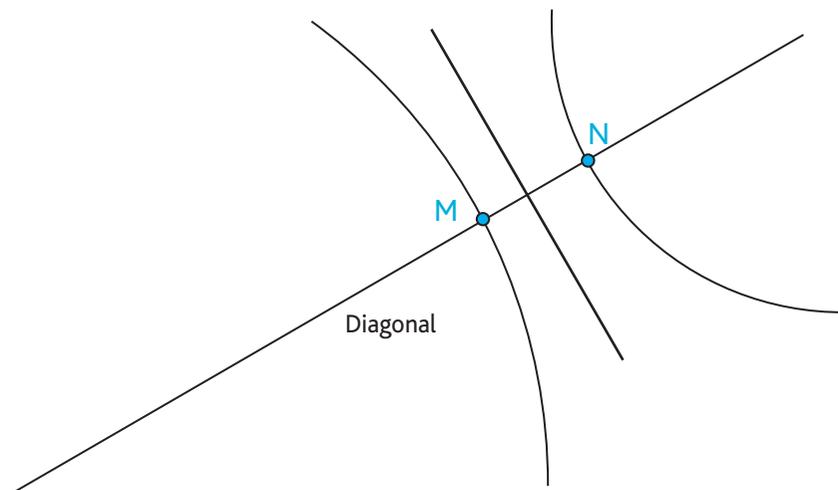
Luego el modelo puede escribirse como:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} - (r_1 + r_2)$$

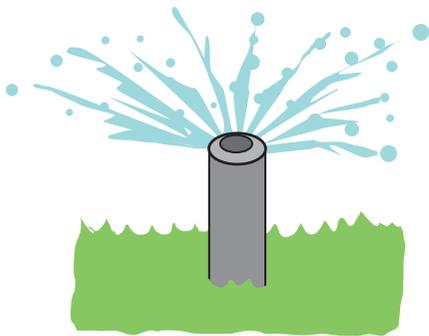
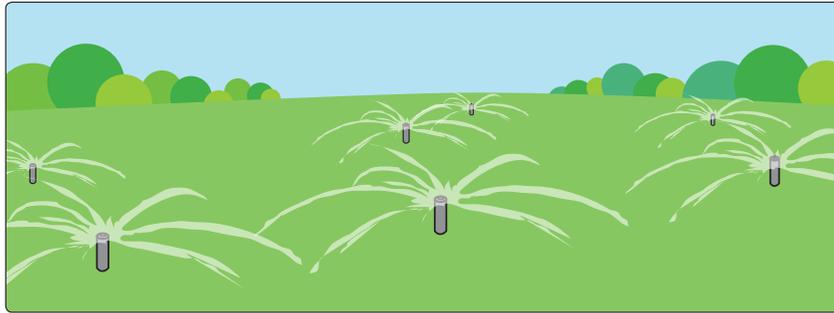
¿Qué sucede si D es igual a la suma de las longitudes de las cadenas? O, ¿si esa diagonal es menor que la suma de las longitudes de las cadenas? ¡Claro!, en ese caso no hay pasada sin riesgo.

Hasta ahora se ha supuesto que el cartero es un punto, ¿cómo influye su tamaño? ¿Cómo calcular el mayor "ancho" del cartero para poder pasar entre los dos perros y no ser mordido? ¿Qué otros supuestos hicimos? Que las cadenas son firmes, que los perros no pueden alargar su hocico más allá de lo que permiten las cadenas. Tal vez pensamos que ambos perros son fieros, en caso contrario bastaría con rodear al que sí lo es. Tal vez también estuvo implícito que ambos perros son igualmente peligrosos. La condición de "camino recto" la supusimos iniciada en la esquina del patio que señala el dibujo. De no ser obligatorio que sea recto, ¿Cuál es la llegada a la diagonal que ofrece el menor peligro? ¡Claro! Una llegada perpendicular al centro del trazo MN , lo deja siempre a igual distancia de ambos peligros.

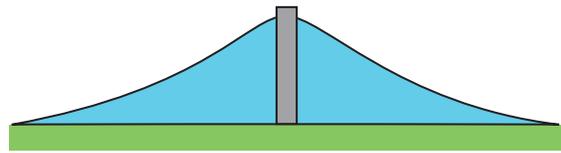
Algo así:



Problema 2: ¿Cómo calcular el número de aspersores para regar el jardín?

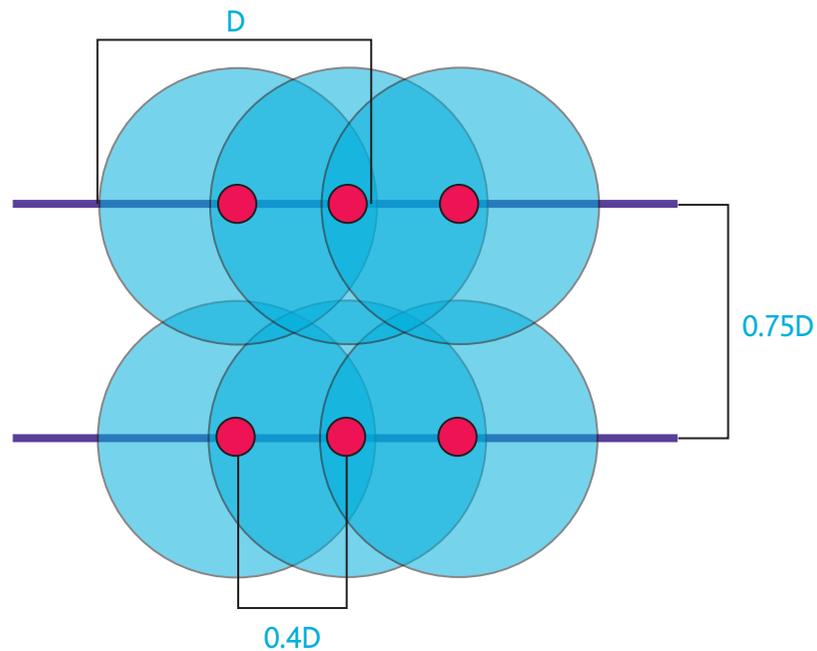


Difusor de 3 a 5 metros

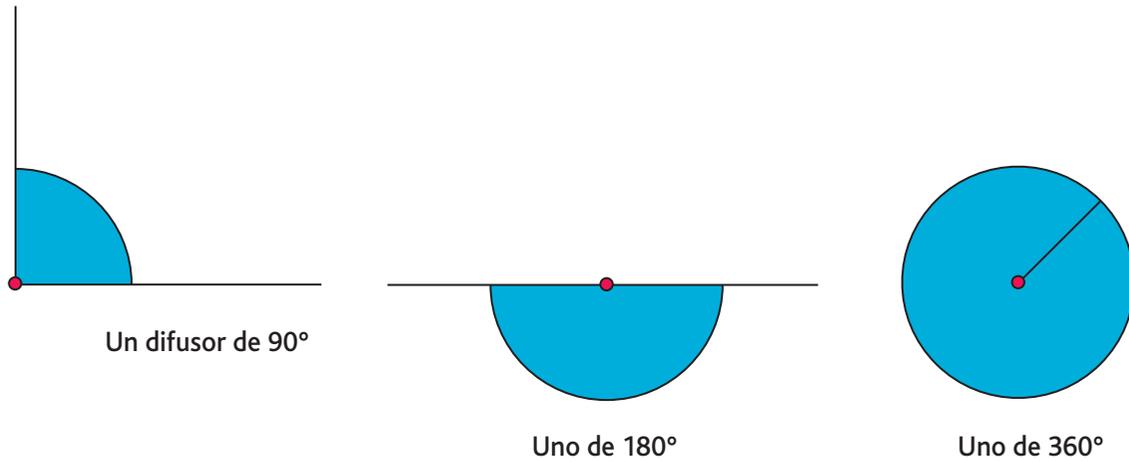


El agua se reparte de un modo no uniforme

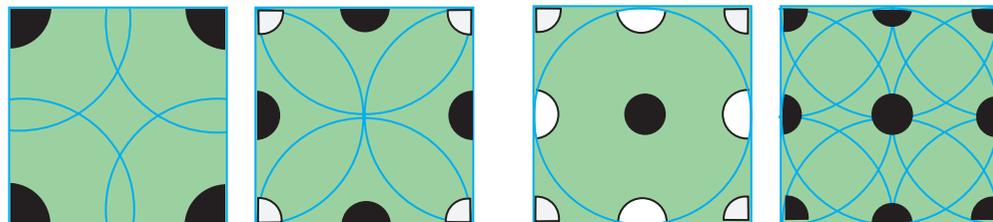
Conviene superponer las regiones de alcance de los aspersores, algunos fabricantes recomiendan hasta un 50% de superposición.



Hay aspersores cuya región de acción está dada por un ángulo de 90° , 180° , 360° y también regulables para diferentes ángulos.



Algunas posibles distribuciones



De 90° en las esquinas

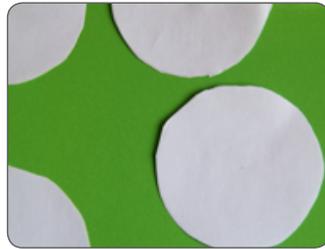
De 180° en los costados

Al centro alguno o algunos de 360°

Para comenzar, ubique los aspersores en las esquinas:



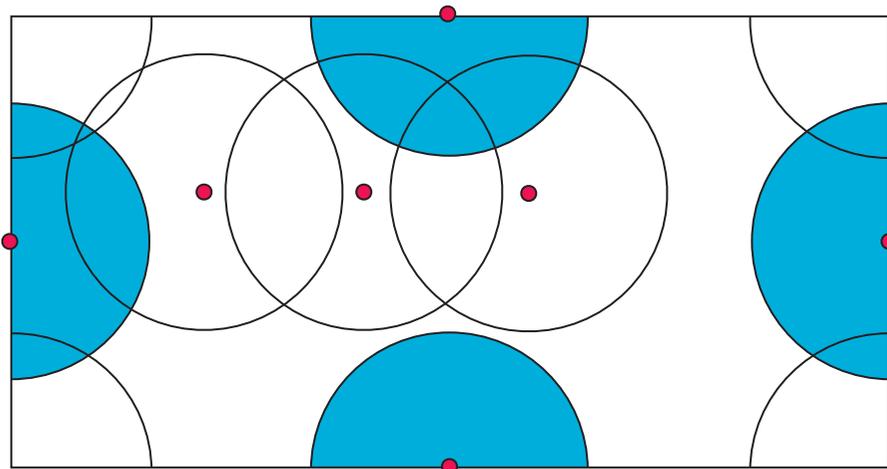
Puede experimentar con sectores y discos de papel.



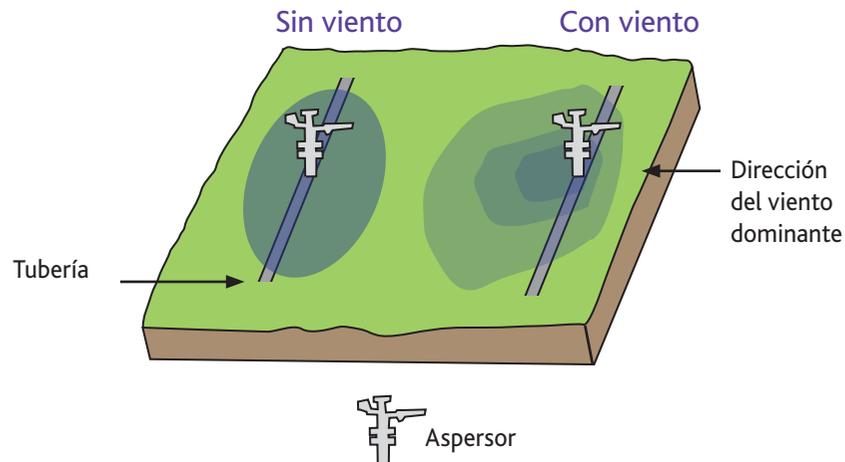
Comience con discos de papel por las esquinas, luego por los bordes y finalmente en el área central.



Con GeoGebra u otro procesador geométrico



¿Cuáles son los supuestos del modelo desarrollado? Entre los supuestos se puede señalar: que la presión del agua es constante, que cada aspersor fue construido en forma consistente con la distancia que marca el fabricante; y, una importante, ¡que no hay viento!



Por último, tenemos un ejemplo de un modelo creado para diseñar. Consideremos un jardín rectangular de 8 por 18 metros. ¿Cuántos aspersores de 90°, 180° y de 360°, con un alcance de 4 metros recomendaría usar para cubrir todo el terreno?

Al modelar simplificamos la realidad, tomamos en cuenta las dimensiones, variables o información que nos parece relevante. Se deja afuera colores, peso, presión, entre otras características de la situación real, que a nuestro juicio no tienen relación con la pregunta que queremos responder o la situación o fenómeno que nos interesa estudiar.

Al modelar, transitamos entre datos de realidad y abstracciones matemáticas. Una cadena o el alcance de un aspersor, por ejemplo, se concretan en radios de circunferencias. El sector de peligro para el cartero, lo representamos por un sector de círculo intersectado por los lados del rectángulo que representa, en nuestro modelo, el patio.

Al crear un modelo, aparece como natural hacer otras preguntas acerca de la situación real, que se infieren de la formulación teórica. Por ejemplo, los puntos M y N que muestran la intersección entre las circunferencias y la diagonal, sugieren valores para los cuales el problema tiene o no tiene solución. En el caso de los aspersores, la forma circular del riego y la forma rectangular de un jardín, sugieren la conveniencia de usar aspersores con 90° para las esquinas y de 180° para los costados.

Se puede observar, también, que modelar se relaciona con representar, resolver y argumentar. En efecto las habilidades matemáticas que ponemos en juego en una situación dada, pueden ser predominantemente de una naturaleza, pero las utilizamos en forma integrada.



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile